KWARTALNIK TELEKOMUNIKACYJNY

1946
Nr 2-3-4

ROK 19 [13] KWIECIEŃ – GRUDZIEŃ 1946 NR 2–3–4

KWARTALNIK TELEKOMUNIKACYJNY

CZASOPISMO

WYDAWANE PRZEZ SEKCJĘ TELEKOMUNIKACYJNĄ STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH
przy poparciu
MINISTERSTWA POCZT i TELEGRAFÓW oraz MINISTERSTWA KOMUNIKACJI

TREŚĆ Nr 2-3-4

Prof. dr inż. JANUSZ GROSZKOWSKI
(Państwowy Instytut Telekomunikacyjny)

Wpływ oporu nieliniowego rzeczywistego na oporność urojoną obwodu

THE EFFECT OF NONLINEAR RESISTANCE ON THE CIRCUIT REACTANCE

by Prof. JANUSZ GROSZKOWSKI, E. E., D. Sc., State Institute of Telecommunications, Warsaw, Poland).

The paper points out that the presence of the nonlinear resistance (f. i. of a diode, copper-oxyde rectifier, etc) in a circuit containing a complex impedance causes the variation of the imaginary component of this impedance. The varation depends, for a given circuit, upon the degree of the sinoidal wave distorsion which is determined by the harmonic content. Thus, in a resonant circuit which is tuned f. i. at small current amplitudes the increase of the amplitude may affect the resonance condition.

This effect is due to the appearance of the harmonics which introduce the supplementary reactive power in the reactances of the circuit. This power must be balanced by the appropriate variation of the reactance for the current of the fundamental frequency.

The theoretical solution of the problem is based on the considerations of the reactive power balance given by the author some time ago for the investigation of the frequency of nonlinear generating systems (see the footnote on the page 18).

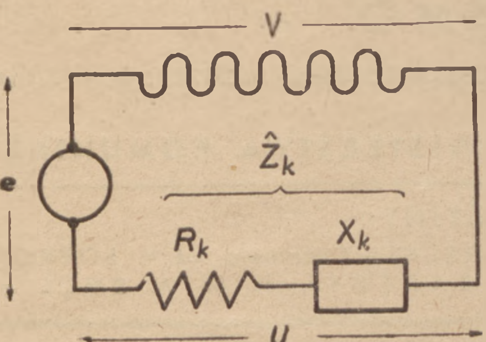
O. Wstęp.

Poniższe rozważania wykazują, iż obecność oporu nieliniowego rzeczywistego (a więc np. diody, prostownika stykowego lub t.p.) w obwodzie, posiadającym opór zespolony, powoduje zmianę wartości składowej urojonej oporności tego oporu. Zmiana ta zależy — dla danego układu — od

stopnia zniekształcenia prądu w obwodzie, wyrażającego się zawartością harmonicznych. W ten sposób, w danym obwodzie, dostrojonym do rezonansu, np. przy bardzo małej amplitudzie prądu, z chwilą wzrostu amplitudy może nastąpić rozstrojenie od rezonansu.

1. Opór nieliniowy w szereg z oporem liniowym.

W obwodzie złożonym z oporu nieliniowego rzeczywistego oraz z oporu liniowego zespolonego (rys. 1.1) działa sinusoidalnie zmienna siła e-

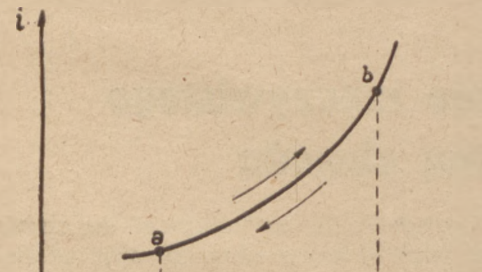


Rys. 1.1 Obwód złożony z oporu nieliniowego rzeczywistego i oporu liniowego zespolonego.

lektromotoryczna e o częstotliwości ω. Opór nieliniowy określony jest przez swą charakterystykę

$$i = F(v) \tag{1.1}$$

Założymy, że charakterystyka ta jest linią pojedyńczą („cienką"), a więc prąd i jest jednoznaczną funkcją napięcia v (rys. 1.2). Oporność zespolona określona jest przez wyrażenie.



Rys. 1.2

$$\bar{Z}_k = R_k + j\,X_k \tag{1.2}$$

przy czym składowa rzeczywista R_x i urojona X_x są — ogólnie biorąc — funkcjami częstotliwości, danymi przez odpowiednie charakterystyki częstotliwości.

Pod wpływem siły elektromotorycznej o równaniu

$$e = E \sin(\omega t + \beta) \tag{1.3}$$

w obwodzie popłynie prąd zmienny odkształcony. Zazwyczaj głównie interesująca jest jego składowa o częstotliwości ω, czyli podstawowa, na której pobierana jest moc ze źródła siły elektromotorycznej i która — jak wiadomo — powoduje obciążenie źródła zasilającego.

Oporność obwodu dla podstawowej oblicza się jako

$$\hat{Z} = \frac{\hat{E}}{\hat{I}} \tag{1.4}$$

gdzie $\hat{E}$ jest symbolem siły elektromotorycznej, zaś $\hat{I}$ symbolem prądu o częstotliwości podstawowej. Znalezienie oporności $\hat{Z}$ oraz jej zależności od danych obwodu i oporu nieliniowego jest celem niniejszej pracy.

2. *Metoda harmonicznych*

W poniższych rozważaniach oprzemy się na metodzie harmonicznych, opracowanej w swoim czasie dla badania częstotliwości nieliniowych układów generacyjnych.*) Metoda ta opiera się na założeniu, że opór rzeczywisty nie może magazynować energii elektrycznej; jego charakterystyka musi wyrażać się linią „cienką", a zatem musi obowiązywać oczywista zależność

$$\int_0 i\,dv = o \tag{2.1}$$

Tutaj symbol $\int_0$ oznacza, że całkowanie odbywa się w zakresie zamkniętego obiegu (np. od a do b i z powrotem — od b do a), odpowiadającego np. jednemu okresowi przebiegu zmiennego.

Oznaczając spadki napięć na oporze nieliniowym oraz na oporze liniowym zespolonym odpowiednio przez v i u (rys. 1.1), mamy

$$v = e - u \tag{2.2}$$

Napięcie e dane jest przez (1.3); napięcie u wywołane przez prąd odkształcony i, o ogólnym równaniu

$$i = I_o + I_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + I_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + =$$

$$= I_o + \sum_{k=1}^{k=\infty} I_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \tag{2.3}$$

może być przedstawione również w postaci

$$u = U_o + \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \sin(k\omega t + \beta_k) \tag{2.4}$$

*) J. Groszkowski, „Zmiany częstotliwości a zawartość harmonicznych w układach oscylacyjnych". Wiadomości i Prace Instytutu Radiotechnicznego, 4, 1932, z. 1.
„The Interdependence of Frequency Variation and Harmonic Content and the Problem of Constant Frequency Oscillators." Proc. Inst. Rad. Eng. 21, 1933, p 958.

We wzorach (2.3) i (2.4) I_o i U_o przedstawiają ewentualnie istniejące składowe stałe, I_k i U_k — amplitudy harmonicznych rzędu k, α_k i β_k ich przesunięcia fazowe. Dla częstotliwości podstawowej ($k = 1$) mamy amplitudy odpowiednio I_1 i U_1 oraz przesunięcia α_1 i β_1

Podstawiając (1.3) i (2.4) do (2.2), otrzymujemy

$$v = E \sin(\omega t + \beta) - U_o - \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \sin(k\omega t + \beta_k) \qquad (2.5)$$

a po zróżniczkowaniu względem czasu

$$dv = \left[E \cos(\omega t + \beta) - \sum_{k=1}^{k=\infty} k\, U_k \cos(k\omega t + \beta_k)\right] \omega\, dt \qquad (2.6)$$

Podstawiając (2.3) i (2.6) do (2.1) i przyjmując całkowanie w zakresie jednego cyklu częstotliwości podstawowej t.j. *od 0 do 2π* napiszemy

$$\int_0^{2\pi} \left[I_o + \sum_1^\infty I_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \right] \left[E \cos(\omega t + \beta) - \sum_1^\infty k\, U_k \cos(k\omega t + \beta_k) \right] \omega\, dt = o \qquad (2.7)$$

Całki zawierające wyraz I_o przy całkowaniu w granicach od 0 do 2π są równe zeru; wyrażenie (2.7) sprowadza się więc do równania

$$\int_0^{2\pi} E \cos(\omega t + \beta) \sum_1^\infty I_k \sin(k\omega t + \beta_k)\, \omega dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\sum_1^\infty I_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \right] \left[\sum_1^\infty k U_k \cos(k\omega t + \beta_k) \right] \right\} \omega\, dt \qquad (2.8)$$

Prawa strona równania — po scałkowaniu — daje[1])

$$\pi \sum_1^\infty k\, I_k\, U_k \sin(\alpha_k - \beta_k) \qquad (2.9)$$

Po stronie lewej, po rozwinięciu sumy, wszystkie całki będą równe zeru z wyjątkiem całki dla $k = 1$, a przeto

$$\int_1^{2\pi} E \cos(\omega t + \beta)\, I_1 \sin(\omega t + \alpha_1)\, \omega\, dt =$$

$$= \pi I_1 E \sin(\alpha_1 - \beta) \qquad (2.10)$$

zatem (1.12) sprowadza się do

$$\sum_1^\infty k\; I_k\, U_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = E\, I_1 \sin(\alpha_1 - \beta) \qquad (2.11)$$

W wyrażeniu tym $(\alpha_k - \beta_k)$ jest przesunięciem fazowym między prądem a napięciem harmonicznym rzędu k; możemy go oznaczyć przez

$$\varphi_k = \alpha_k - \beta_k\,; \qquad (2.12)$$

podobnie przesunięcie między prądem podstawowym a siłą elektromotoryczną E jest

$$\varphi = \alpha_1 - \beta\,, \qquad (2.13)$$

zatem (2.11) będzie

$$\sum_1^\infty k\; I_k\; U_k \sin \varphi_k = E\, I_1 \sin \varphi\,. \qquad (2.14)$$

Z drugiej strony, między napięciami i prądami

---

[1]) Wyrażenie w klamrze po prawej stronie równania (2.9) może być rozwinięte i ugrupowane następująco:

$$\sum\nolimits' k\omega\, I_k\, U_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \cos(k\omega t + \alpha_k) +$$

$$+ \sum\nolimits'' p\omega\; I_k\; U_k \sin(p\omega t + \alpha_p) \cos(q\omega t + \beta_q)$$

gdzie Σ' jest sumą iloczynów dla $k = 1, 2, 3, \ldots\infty$ zaś Σ'' jest sumą wszelkich możliwych iloczynów dla $p = 1, 2, 3, \ldots\infty$ i $q = 1, 2, 3, \ldots\infty$ z wyjątkiem $p = q$.

Ponieważ

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\omega t + \alpha_k) \cos(k\omega t + \beta_k)\, d\omega t =$$

$$= \sin\alpha_k \cos\beta_k \int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t\; d(\omega t) -$$

$$\cos\alpha_k \sin\beta_k \int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t\; d(\omega t) +$$

$$+ (\cos\alpha_k \cos\beta_k - \sin\alpha_k \sin\beta_k) \quad \text{oraz}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cos k\omega t\; d(\omega t) = \pi(\sin\alpha_k \cos\beta_k -$$

$$+ \cos\alpha_k \sin\beta_k) = \pi \sin(\alpha_k - \beta_k)$$

zaś

$$\int_0^{2\pi} \sin(p\omega t + \alpha_p) \cos(q\omega t + \beta_q)\, d(\omega t) = 0$$

przeto otrzymujemy wzór (2.9.).

U_k i I_k występującymi na oporności zespolonej

$$\hat{Z}_k = R_k + j\,X_k \tag{2.15}$$

muszą istnieć zależności

$$U_k = I_k\,|\hat{Z}_k| \tag{2.16}$$

oraz

$$\sin\varphi_k = \frac{X_k}{|\hat{Z}_k|} \tag{2.17}$$

gdzie $\hat{Z}_k$ oznacza moduł oporności zespolonej

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2} \tag{2.18}$$

zaś R_k i X_k są składowymi rzeczywistymi i urojonymi oporności zespolonych dla częstotliwości harmonicznych $k\omega$.

Oznaczając oporność obwodu dla siły elektromotorycznej $\hat{E}$ przez

$$\hat{Z} = R + j\,X \tag{2.19}$$

możemy napisać dla jej modułu

$$|\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{2.20}$$

związek

$$E = I_1\,|\hat{Z}| \tag{2.21}$$

oraz dla przesunięcia fazowego zależność

$$\sin\varphi = \frac{X}{|\hat{Z}|} \tag{2.22}$$

3. *Wyrażenie na oporność urojoną, spowodowaną obecnością harmonicznych.*

Uwzględniając w (2.14) z jednej strony (2.16) i (2.17), z drugiej zaś (2.21) i (2.22), napiszemy

$$\sum_{1}^{\infty} k\,I_k^2\,X_k = I_1^2\,X \tag{3.1}$$

a po wprowadzeniu zawartości harmonicznych prądowych jako stosunków

$$n_k = \frac{I_k}{I_1} \quad \left(n_1 = 1,\quad n_2 = \frac{I_2}{I_1}\quad \text{itd}\right) \tag{3.2}$$

doprowadzimy (3.1) do postaci

$$X = \sum_{k=1}^{k=\infty} k\,X_k\,n_k^2 \tag{3.3}$$

Wydzielenie z sumy (3.3) wyrazu dla częstotliwości podstawowej $(k = 1)$ daje

$$X = X_1 + \sum_{k=2}^{k=\infty} k\,X_k\,n_k^2 \tag{3.4}$$

Jest to wyrażenie na szukaną oporność urojoną obwodu dla siły elektromotorycznej $\hat{E}$.

W razie, gdy w obwodzie nie ma oporności nieliniowej, zawartość harmonicznych jest równa zeru, czyli $n_k \Big|_{k=2}^{k=\infty} = 0$, a przeto oporność urojona

$$X = X_1$$

jest równa oporności urojonej obwodu dla częstotliwości siły elektromotorycznej (podstawowej).

W przypadku istnienia oporności nieliniowej oporność urojona zwiększa się o wartość zależną od rodzaju będącej w obwodzie oporności urojonej oraz od zawartości harmonicznych, zgodnie z (3.4).

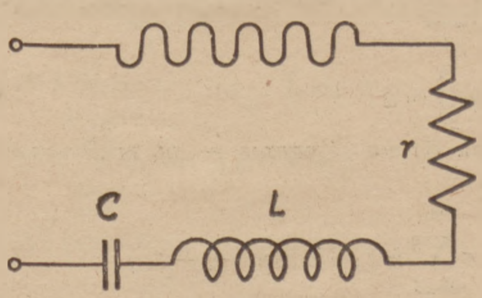
Przy $X_k \Big|_{k\,1}^{k=\infty} = 0$, a więc gdyby oporność obwodu była rzeczywistą dla wszystkich częstotliwości, nieliniowość oporu nie powodowałaby zjawiania się składowej urojonej.

4. *Fizyczna interpretacja wzoru (3.4)*

Gdy w obwodzie zamiast oporu nieliniowego mamy opór liniowy, obwód przedstawia dla siły elektromotorycznej $\hat{E}$ oporność zespoloną o składowej urojonej $X = X_1$. Oporności X_1 odpowiada pewna moc urojona, która daje właśnie przesunięcie faz między E i I_1. Z chwilą gdy opór liniowy przechodzi w nieliniowy, zjawiają się harmoniczne, którym odpowiada dodatkowa moc urojona w oporze urojonym obwodu. Ponieważ dostarczanie mocy przez źródło siły elektromotorycznej może się odbywać jedynie na częstotliwości podstawowej, przeto oporność urojona obwodu dla tej częstotliwości musi ulec odpowiednio zmianie, stosownie do wzoru (3.4).

5. *Przykład*

Przeliczmy wpływ harmonicznych na rezonans w obwodzie, przedstawionym na rys. 5.1. Dla bardzo



Rys. 5.1

małych amplitud, jeśli można np. uważać, że opór nieliniowy zachowuje się jak opór liniowy o wartości r', będziemy mieli rezonans dla

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1 \tag{5.1}$$

i dla tej częstotliwości oporność wejściowa obwodu będzie

$$Z = r + r' \qquad (5,2)$$

gdyż

$$X_1 = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = 0 \qquad (5,3)$$

Ze wzrostem amplitudy zjawiają się harmoniczne i zgodne z (3.4) oporność urojona wyniesie

$$X = X_1 + \sum_{2}^{\infty} k\, X_k\, n_k^{\,2} = \sum_{2}^{\infty} k\, X_k\, n_k^{\,2} \qquad (5.4)$$

Ponieważ

$$X_k = k\omega L - \frac{1}{k\,\omega\, C} = \frac{1}{k\,\omega\, C}\left(k^2 \frac{\omega^2}{\omega_1^{\,2}} - 1\right) \cong$$

$$\cong \frac{1}{k\,\omega_1 C}\,(k^2 - 1) \qquad (5.5)$$

przeto

$$X = \frac{1}{\omega_1 C}\sum_{2}^{\infty}(k^2 - 1)\, n_k^{\,2} = \frac{1}{\omega_1 C}\,[3n_2^{\,2} + 8n_3^{\,2} +$$

$$+ 15\, n_4^{\,2} + 24\, n_5^{\,2} + \ldots] \qquad (5.6)$$

Przyjmując np.

$n_2 = 20\%$, $n_3 = 15\%$, $n_4 = 10\%$, $n_5 = 5\%$, $n_6 \cong 0$

znajdujemy

$$X = \frac{1}{\omega_1 C}\,[3.400 + 8.225 + 15.100 + 24.25]\,.\,10^{-4} =$$

$$= 0{,}51\,\frac{1}{\omega_1 C}$$

Przy $f = 10^5$, $C = 100.10^{-12}$ F, otrzymamy $X = 6500\,\Omega$

Jeśli np. oporność $r' = 5000\ \Omega$, wówczas oporność obwodu zmieni się od wartości

$|\bar{Z}| \cong r' = 5000\,\Omega$ (bez harmonicznych)

do wartości

$|\bar{Z}'| = \sqrt{5000^2 + 6500^2} \cong 8200\,\Omega$ (z harmonicznymi)

a więc nastąpi półtorakrotny wzrost modułu oporności pozornej.

6. *Równoważna indukcyjność i równoważna pojemność przy prądzie odkształconym*

Dla prądu odkształconego indukcyjność ulega zmianie od wartości L do pewnej wartości równoważnej, którą można określić z równania (3.3), a mianowicie

$$\omega L' = \sum_{k=1}^{k=\infty} k\,(k\,\omega\, L)\, n_k^{\,2} \qquad (6.1)$$

skąd

$$L' = L\,.\,\sum_{1}^{\infty} k^2\, n_k^{\,2} \qquad (6.2)$$

Podobnie mamy dla pojemności

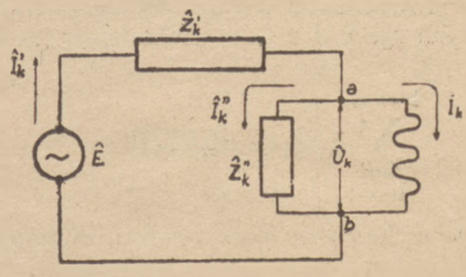
$$\frac{1}{\omega C'} = \sum_{k=1}^{k=\infty} k\left(\frac{1}{k\,\omega\, C}\right) n_k^{\,2} \qquad (6.3)$$

czyli

$$C' = \frac{C}{\sum_{1}^{\infty} n_k^{\,2}} \qquad (6.4)$$

7. *Opór nieliniowy zabocznikowany oporem zespolonym liniowym*

Rozpatrzmy teraz wpływ oporu nieliniowego zabocznikowanego oporem zespolonym (rys. 7.1) na oporność urojoną obwodu.



Rys. 7.1 Opór nieliniowy zabocznikowany oporem zespolonym.

Charakterystyka oporu nieliniowego dana jest przez równanie (1.1), oporności $\bar{Z}_k'$ i $\bar{Z}_k''$ oraz siła elektromotoryczna — przez wyrażenia kształtu (1.2) wzgl. (1.3).

Rozumując jak poprzednio, możemy uważać, że między napięciem a prądem w oporze nieliniowym istnieje zależność (2.1), a przeto, zakładając przebiegi odkształcone z pominięciem składowych stałych, możemy napisać

$$\int_0^{2\pi}\left[\sum_{1}^{\infty} I_k \sin(k\,\omega\, t + \alpha_k)\right]\left[\sum_{1}^{\infty} k\, U_k \cos(k\,\omega t + \beta_k)\right]\omega\, d\,t = o \qquad (7.1)$$

Stąd otrzymujemy — jak wiadomo — warunek (2.9).

$$\sum_{1}^{\infty} k\, I_k\, U_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = o \qquad (7.2)$$

Ponieważ wyrażenie

$$I_k \, U_k \sin(\alpha_k - \beta_k) \qquad (7.3)$$

jest miarą mocy urojonej, więc można (7.2) przedstawić symbolicznie jako

$$\sum_{1}^{\infty} k \left| \widehat{U}_k \check{I}_k \right|_{ur} = 0 \qquad (7.4)$$

gdzie $\left| \widehat{U}_k \check{I}_k \right|_{ur}$ jest składową urojoną wyrażenia zespolonego, otrzymanego przez pomnożenie symbolu $\widehat{U}_k$ przez sprzężony z nim symbol $\check{I}_k$

Oznaczając oporność, widzianą przez opór nieliniowy między punktami *ab*, przez $\widehat{Z}_k$ związek między $\widehat{U}_k$ i $\widehat{I}_k$ napiszemy w postaci

$$\widehat{U}_k = - \widehat{I}_k \, \widehat{Z}_k , \qquad (7.5)$$

a przeto (7.4) będzie

$$\sum_{1}^{\infty} k \left| \widehat{Z}_k \right|_{ur} . \, I_k^2 = 0 \qquad (7.6)$$

Po wprowadzeniu zawartości harmonicznych prądowych zgodnie z (3.1) dochodzimy do wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k \left| \widehat{Z}_k \right|_{ur} , n_k^2 = 0 \qquad (7.7)$$

skąd, po wydzieleniu podstawowej, otrzymujemy

$$\left| \widehat{Z}_1 \right|_{ur} + \sum_{k=2}^{k \;\; \infty} k \left| \widehat{Z}_k \right|_{ur} n_k^2 = 0 \qquad (7.8)$$

Dla znalezienia wielkości oporności $\widehat{Z}_k$, jaką widzi opór nieliniowy między punktami *ab*, zastąpimy siłę elektromotoryczną $\widehat{E}$ przez równoważny jej opór ujemny — w ogólnym przypadku — zespolony, określony jako

$$\widehat{Z}_k{}^0 = - \frac{\widehat{E}}{\widehat{I}_k{}'} \qquad (7.9)$$

Napięcie na tym oporze oraz prąd przez niego płynący będą takie same jak w przypadku siły elektromotorycznej, którą on zastępuje.

Oporność $\widehat{Z}_k$ znajdujemy w zwykły sposób dla układu jak na rys. 7.2 jako

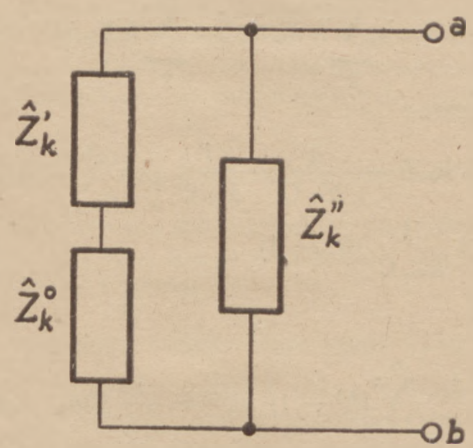
$$\widehat{Z}_k = \frac{(\widehat{Z}_k{}^0 + \widehat{Z}_k{}')\, \widehat{Z}_k{}''}{\widehat{Z}_k{}^0 + \widehat{Z}_k{}' + \widehat{Z}_k{}''} \qquad (7.10)$$

Dla częstotliwości podstawowej, t. j. dla *k = 1* mamy

$$\widehat{Z}_1 = \frac{(\widehat{Z}_1{}^0 + \widehat{Z}_1{}')\, \widehat{Z}_1{}''}{\widehat{Z}_1{}^0 + \widehat{Z}_1{}' + \widehat{Z}_1{}''} \qquad (7.11)$$

natomiast dla harmonicznych, t. j. dla $k \Big|_2^{\infty} \neq 0$, ponieważ siła elektromotoryczna jest czysto sinusoidalna, musimy przyjąć

$$\widehat{Z}_k{}^0 \Big|_{k=2}^{k=\infty} = 0$$



Rys. 7.2

a przeto otrzymamy

$$\widehat{Z}_k = \frac{\widehat{Z}_k{}' \, \widehat{Z}_k{}''}{\widehat{Z}_k{}' + \widehat{Z}_k{}''} \qquad (7.12)$$

Podstawiając (7.11) i (7.12) do (7.8), mamy

$$\left| \frac{(\widehat{Z}_1{}^0 + \widehat{Z}_1{}')\, \widehat{Z}_1{}''}{\widehat{Z}_1{}^0 + \widehat{Z}_1{}' + \widehat{Z}_1{}''} \right|_{ur} = - \sum_{k=2}^{k=\infty} k \left| \frac{\widehat{Z}_k{}' \, \widehat{Z}_k{}''}{\widehat{Z}_k{}' + \widehat{Z}_k{}''} \right|_{ur} n_k^2 \qquad (7.13)$$

Z (7.13) widać, iż przy stałych wartościach oporności $\widehat{Z}_k{}' \Big|_1^{\infty}$ i $\widehat{Z}_k{}'' \Big|_1^{\infty}$ składowa urojona oporności $\widehat{Z}_1{}^0$ będzie funkcją zawartości harmonicznych, jakie występują w oporności nieliniowej.

Ta oporność $\widehat{Z}_1{}^0$ zgodnie z (7.9), określa oporność układu $\widehat{Z}$ dla siły elektromotorycznej $\widehat{E}$, bowiem

$$\widehat{Z} = \frac{\widehat{E}}{\widehat{I}_1} = - \widehat{Z}_1{}^0 \qquad (7.14)$$

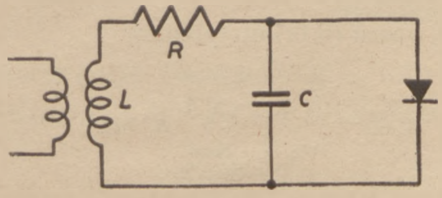
Jej składowa urojona

$$\left| \widehat{Z} \right|_{ur} = \left| - \widehat{Z}_1{}^0 \right|_{ur} \qquad (7.15)$$

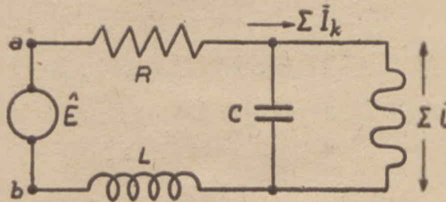
jest właśnie szukaną opornością, zmieniającą się wraz z zawartością harmonicznych.

8. Opór nieliniowy zabocznikowany pojemnością

Zbadajmy wpływ oporu nieliniowego na warunek rezonansu w obwodzie L R C (rys. 8.1). Przedstawiając układ z rys. 8.1 w sposób jak na rys. 8.2,



Rys. 8.1



Rys. 8.2

mamy znaleźć — dla częstotliwości podstawowej — zmianę oporności urojonej w punktach *ab* na skutek występowania harmonicznych. Zawartość harmonicznych prądowych w oporze nieliniowym przy prądzie podstawowym I_1 i napięciu podstawowym U_1 niech wynosi n_k.

Dla zastosowania wzoru (7.13) znajdziemy

$$\widehat{Z}_k' = R + jk\omega L \cong jk\omega L \qquad (8.1)$$

$$\widehat{Z}_k'' = -j\frac{1}{k\omega C} \qquad (8.2)$$

$$\widehat{Z}_k' + \widehat{Z}_k'' = -j\frac{1}{k\omega C}(k^2\omega^2 LC - 1) \cong$$

$$\cong -j\frac{1}{k\omega C}(k^2-1) \qquad (8.3)$$

bowiem

$$\omega^2 LC \cong 1 \qquad (k^2 >> 1)$$

Poza tym

$$\widehat{Z}_1' = R + j\omega L \qquad (8.4)$$

$$\widehat{Z}_1'' = -j\frac{1}{\omega C} \qquad (8.5)$$

Szukaną oporność zespoloną oznaczymy przez

$$\widehat{Z} = r + jx = -\widehat{Z}_1^0 \qquad (8.6)$$

Podstawiając (8.1) ÷ (8.6) do (7.13), otrzymamy

$$\left|\frac{-j\left[(R-r)+j(\omega L-x)\right]\frac{1}{\omega C}}{(R-r)+j\left(\omega L-x-\frac{1}{\omega C}\right)}\right|_{ur} =$$

$$= -\sum_{k=2}^{k=\infty} k\left|\frac{-j\frac{1}{k\omega C}jk\omega L}{-j\frac{1}{k\omega C}(k^2-1)}\right|_{ur} n_k^2 \qquad (8.7)$$

Po wydzieleniu części urojonej będzie

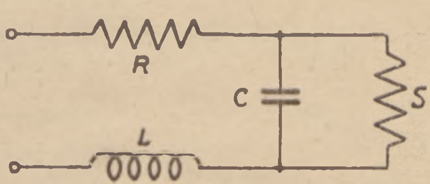
$$\frac{1}{\omega C}\,\frac{(R-r)^2+(\omega L-x)\left(\omega L-x-\frac{1}{\omega C}\right)}{(R-r)^2+\left(\omega L-x-\frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \omega L\sum_{k=2}^{k=\infty}\frac{k^2}{k^2-1}n_k^2 \qquad (8.8)$$

Przypuśćmy na chwilę, że opór nieliniowy został zastąpiony przez opór liniowy, dający te same wartości U_1 i I_1, a więc przez opór o oporności

$$S = \frac{U_1}{I_1} \qquad (8.9)$$

Oporność układu (rys. 8.3) dla częstotliwości



Rys. 8.3

podstawowej znajdujemy w zwykły sposób jako

$$Z = r + jx = R + j\omega L + \frac{-j\frac{1}{\omega C}S}{S-j\frac{1}{\omega C}} =$$

$$= \left(R + \frac{S}{1+S^2\omega^2C^2}\right) + j\left(\omega L - \frac{S^2\omega C}{1+S^2\omega^2C^2}\right) \qquad (8.10)$$

Przez porównanie otrzymujemy

$$r = R + \frac{S}{1+S^2\omega^2C^2} \qquad (8.11)$$

$$x = \omega L - \frac{S^2\omega C}{1+S^2\omega^2C^2} \qquad (8.12)$$

Dla pracy z oporem liniowym będzie $n_k\Big|_2^\infty = 0$

a zatem równanie (8.8) daje warunek

$$(R-r)^2 + (\omega L - x)\left(\omega L - x - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \qquad (8.13)$$

Oczywiście wielkości (8.11) i (8.12) muszą spełniać równanie (8.13). Jeśli w obwodzie ma zachodzić rezonans, musi być $x = 0$.

Podstawiając do (8.13) $x = 0$ oraz r z (8.11), otrzymamy na częstotliwość rezonansową wyrażenie

$$\omega_o = \frac{1}{L\,C}\left(1 - \frac{L}{S^2 C}\right) \qquad (8.14)$$

Dla tej częstotliwości oporność wejściowa układu, dana przez (8.6), jest

$$\hat{Z} = r \qquad (8.15)$$

Dla częstotliwości ω_o równanie (8.13) przechodzi w

$$(R - r)^2 + \omega_o L\left(\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}\right) = 0 \qquad (8.16)$$

Gdy opór liniowy przejdzie w niewielkim stopniu w nieliniowy, zjawią się harmoniczne i prawa strona równania (8.8) będzie różna od zera.

Równanie to możemy napisać wówczas w postaci

$$(R - r)^2 + (\omega_o L - x)\left(\omega_o L - x - \frac{1}{\omega_0 C}\right) =$$

$$= \left[(R - r)^2 + \left(\omega_0 L - x - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2\right]\omega^2_0 L C \,.$$

$$\sum_2^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} n_k^{\,2} \qquad (8.17)$$

Tutaj x jest składową urojoną oporności wejściowej, wywołaną harmonicznymi, które zjawiły się w układzie.

Ze względu na poprawkowy charakter prawej strony rownania (8.17), można w niej pominąć x, zwłaszcza, że zazwyczaj bywa

$$(R - r)^2 = \frac{S^2}{1 + S^2 \omega^2 C^2} >> \left(\omega_0 L - x - \frac{1}{\omega_0 C}\right) \qquad (8.18)$$

Uwzględniając (8.18) oraz odejmując od równania (8.17) rownanie (8.16), jak również pomijając $x << \omega_o L$, otrzymamy równanie

$$x = - \frac{S^2 \omega_0 C}{(1 + S^2 \omega_o{}^2 C^2)^2} \sum_2^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} n_k^{\,2} \qquad (8.19)$$

Dla $k^2 >> 1$ wyrażenie pod znakiem sumy może być uproszczone

$$\sum_2^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} n_k^{\,2} \cong \sum_2^{\infty} n_k^{\,2} \qquad (8.20)$$

W przypadku, gdy $S^2 >> \frac{1}{\omega_0{}^2 C^2}$ oraz jeśli zastąpimy zawartości harmonicznych prądowych przez zawartości harmonicznych napięciowych *)

$$m_k = \frac{U_k}{U_1} \left(m_1 = 1\,,\ m_2 = \frac{U_2}{U_1} \ \text{itd} \right) \qquad (8.21)$$

zamiast wzoru (8.19) otrzymamy

$$x \cong - \frac{1}{\omega_0 C} \sum_{k=2}^{k=\infty} k^2 m_k^{\,2} \qquad (8.22)$$

9. *Przykład*

W obwodzie jak na rys. 8.2 przy następujących danych:

$$R = 25\,\Omega\,,\ L = 1\,mH\,,\ C = 200\,.\,10^{-12}\,F$$

$S = 100000\ \Omega$ uzyskuje się rezonans, zgodnie z (8.14), dla

$$\omega_0 = 2{,}24\,.\,10^6\,.$$

Wskutek nieliniowości oporu stwierdzono — przy napięciu podstawowym $U_1 = 10$ V — następujące napięcia harmoniczne

$$U_2 = 1\ V,\ U_3 = 0{,}5\ V,\ U_4 = 0{,}5\ V,\ U_5 = 0{,}1\ V$$

co daje $m_2 = 0{,}1$, $m_3 = 0{,}05$, $m_4 = 0{,}05$, $m_5 = 0{,}01$.

Ponieważ $S^2 \omega_0{}^2 C^2 = 2.10^3 >> 1$, przeto stosujemy wzór (8.22), który daje

$$x \cong - 235\ \Omega$$

Przy rezonansie rzeczywista oporność obwodu, dana przez (8.11), wynosi

$$\dot{r} = 25 + \frac{10^5}{2.10^3} = 75\ \Omega$$

Dla otrzymania na pojemności C napięcia $U_1 = 10$ V, potrzebny jest w obwodzie prąd $I_1' \cong 4{,}5\,mA$, co wymaga siły elektromotorycznej $E \cong 0{,}35$ V. Z chwilą zjawienia się harmonicznych prąd w obwodzie spadnie do wartości

$$I_1'' = \frac{0{,}35}{\sqrt{75^2 + 235^2}} = 1{,}4\ mA$$

Dla przywrócenia rezonansu potrzebna jest zmiana, np. indukcyjności L, do wartości L' wynoszącej

$$L' = 0{,}001 + \frac{235}{2{,}24.10^6} = 0{,}001 + 0{,}0001 = 0{,}0011\ H$$

$$= 1{,}1\ \text{mH, t.j. o} + 10\%,$$

lub pojemności C do wartości: $C' \cong 220\,.\,10^{-12} F$.

---

*) Związek między m_k a n_k znajdujemy z zależności

$$U_k = I_k \left| \frac{S\,.\,\hat{Z}_k''}{S + \hat{Z}_k''} \right|$$

Dr inż. ADAM SMOLIŃSKI

Obliczanie wzmacniaczy dławikowych małej częstotliwości

COMPUTING OF IMPEDANCE — COUPLED AUDIO FREQUENCY AMPLIFIERS

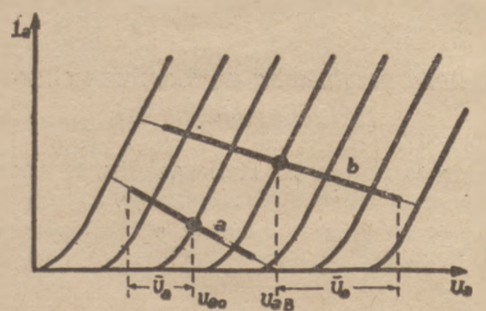
SUMMARY

New methods of designing the resistance - coupled amplifiers are adopted to computing the impedance - coupled amplifiers.

Relations are given for computing the response characteristic and elements even in the case of finite bias by - pass condenser.

1. Zastosowanie wzmacniaczy dławikowych

Powszechnie stosowane wzmacniacze oporowe posiadają w zastosowaniu do techniki nadawczej kilka wad, jak stosunkowo małą wartość wzmocnienia napięciowego w porównaniu do spółczynnika amplifikacji lampy oraz duży spadek napięcia na oporze obciążenia. To ostatnie powoduje niewykorzystanie napięciowe lampy (rys. 1). Brak pentod odpowiednich do pracy we



Rys. 1. Charakterystyki robocze wzmacniacza a) oporowego, b) dławikowego w założeniu $U_{aB}=U_{ao\,max}$

wzmacniaczu oporowym przy pracy większymi napięciami zmiennymi (rzędu kilkuset woltów i wyższych), powoduje konieczność użycia triod, wobec czego szczególnie uwydatnia się pierwsza z wyżej wspomnianych wad wzmacniaczy oporowych.

Wady te usuwa zastosowanie wzmacniaczy dławikowych, pozwalających na uzyskanie większych wzmocnień napięciowych przy danym spółczynniku amplifikacji (większa wartość oporu obciążenia w zakresie średnich częstotliwości), oraz na pracę większymi amplitudami napięć anodowych (patrz. rys. 1). Zalety te opłaca się większym kosztem wzmacniacza.

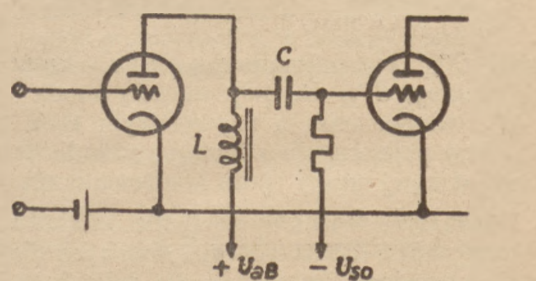
W porównaniu do wzmacniaczy transformatorowych, wzmacniacze dławikowe odznaczają się w zasadzie brakiem rezonansów, wytwarzających przesunięcia fazy znacznie większe od 90°, tak groźne przy projektowaniu wzmacniaczy z odsprzężeniem. W obecnych czasach odsprzężenie jest jednym z głównych elementów układu wzmacniającego w urządzeniach nadawczych, wobec czego unika się tam stosowania napięciowych wzmacniaczy transformatorowych.

2. Dławik.

Charakterystycznym elementem wzmacniacza dławikowego jest dławik małej częstotliwości. Dławik taki, nawinięty na rdzeniu ferromagnetycznym, charakteryzuje się następującymi wielkościami:

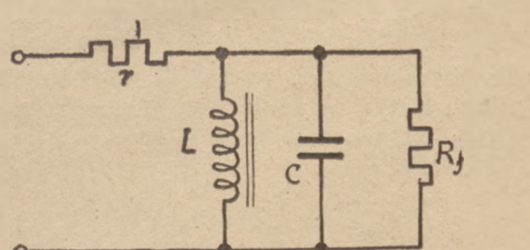
1. Indukcyjnością L przy składowej stałej prądu (anodowego) I_{oo} i napięciu zmiennym U.
2. Pojemnością własną C_L
3. Oporem rzeczywistym uzwojenia r.
4. Oporem strat w rdzeniu ferromagnetycznym R_f
5. Wielkością zniekształceń nieliniowych, wprowadzanych w układzie wzmacniającym.

Tym wielkościom odpowiada schemat zastępczy z rys. 3.



Rys. 2. Schemat ideowy wzmacniacza dławikowego.

Wyżej podane wielkości można obliczyć według ogólnie znanych wzorów i wykresów (patrz

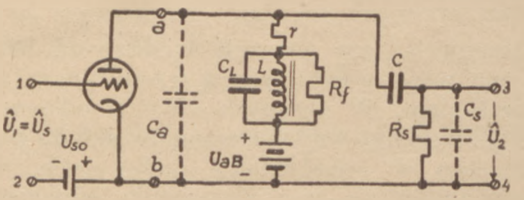


Rys. 3. Schemat zastępczy dławika małej częstotliwości.

naprzykład IV rozdział „Übertrager" książki H. Bartelsa pt. „Grundlagen der Verstärkertechnik").

3. *Schemat zastępczy wzmacniacza dławikowego.*

Wzmacniacz dławikowy mimo pozornie prostego schematu ideowego (rys. 2) posiada obciążenie obwodu anodowego lampy w dość skomplikowanej postaci (rys. 4). Obok dławika łącznie z jego



Rys. 4. Schemat wzmacniacza dławikowego, uwzględniający własności wtórne elementów układu.

wtórnymi cechami, uwidocznionymi w oporach r i R_f oraz pojemności C_L, występują opór siatkowy R_s pojemność sprzęgająca C oraz pojemności szkodliwe C_a i C_s. Ze strony anody występuje pojemność szkodliwa

$$C_a \cong C'_{ak} + C'_{as} + C_{p1} \quad (1)$$

gdzie C'_{ak} jest pojemnością anoda - katoda pierwszej lampy, C'_{as} zaś pojemnością anoda - siatka tejże lampy, a C_{p1} pojemnością szkodliwą układu ze strony anody (przed kondensatorem sprzęgającym C).

Ze strony siatki lampy następnej występuje pojemność szkodliwa

$$C_s \cong C''_{sk} + C''_{as}(1 + k''_u) + C_{p2} \quad (2)$$

gdzie C''_{sk} jest pojemnością siatka - katoda drugiej lampy, C''_{as} zaś pojemnością anoda - siatka i k''_u wzmocnieniem napięciowym tejże lampy. C_{p2} jest pojemnością szkodliwą układu ze strony siatki drugiej lampy (poza kondensatorem C).

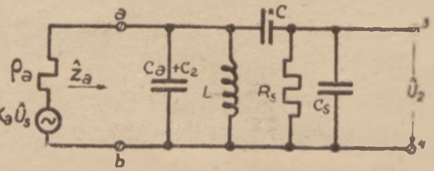
W praktyce można uprościć nieco układ z rys. 4. W przypadku dobrze zaprojektowanych dławików można pominąć bez szkody dla dokładności niżej podanych obliczeń opory uzwojenia r i strat w rdzeniu R_f wobec oporu wewnętrznego lampy ρ_a oraz oporu siatkowego R_s. Mimo tych uproszczeń obciążenie obwodu anodowego, widziane z zacisków ab (rys. 4) jest nadal skomplikowanej postaci (rys. 5). Wskutek istnienia w obwodzie anodowym lampy oporu $\hat{Z}_a$ typu RLC, wzmocnienie napięciowe lampy, zdefiniowane jako stosunek napięć na siatkach kolejnych lamp:

$$\hat{k}_u = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = k_u \cdot e^{j\alpha} \quad (3)$$

zależy w poważnym stopniu od częstotliwości. Zmianom tym ulega zarówno moduł k_u powyższej zależności, wyrażający właściwe wzmocnienie napięciowe, jak i jego kąt fazowy α

4. *Metody obliczania charakterystyki częstotliwości*

Klasyczna metoda obliczania układów typu podanego na rys. 5 polega na napisaniu równań



Rys. 5. Opór obciążenia obwodu anodowego.

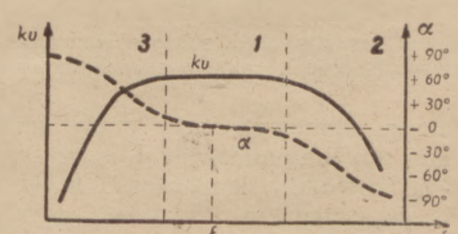
Kirchhoff'a i znalezieniu z nich napięcia $\hat{U}_2$ w zależności od SEM-nej $K_a \hat{U}_s$. Metoda ta jest żmudna i prowadzi do wyników o dość zawiłej postaci, którą następnie upraszcza się zależnie od dodatkowych warunków, występujących w różnych zakresach częstotliwości [1].

Do tych samych wyników prowadzi teoria czwórników, zastosowana do układów wzmacniających [2,3].

Niedostateczna przejrzystość tych metod i brak związków fizycznych z poszczególnymi stadiami rozważań matematycznych spowodowały, że obecnie stosuje się inną metodę rozważań, która mimo, że jest metodą przybliżoną, jednak daje rezultaty wystarczająco dokładne dla celów praktycznych.

5. *Metoda przybliżona wyznaczania charakterystyki częstotliwości.*

Metoda ta polega na stwierdzeniu, że charakterystyka częstotliwości rozważanego układu — dla wzmacniacza dławikowego w postaci podanej na rys. 6 — dzieli się na trzy zakresy. Są to: zakres

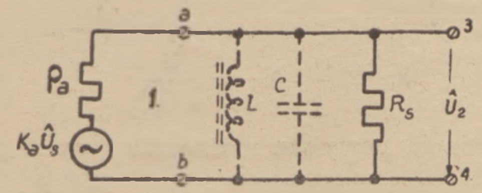


Rys. 6. Charakterystyka wzmocnienia i jego kąta fazowego w funkcji częstotliwości.

pierwszy, środkowy, w którym wzmocnienie i jego kąt fazowy nie zależą od częstotliwości; zakres drugi, wyższych częstotliwości, w którym wzmocnienie maleje ze wzrostem częstotliwości oraz zakres trzeci, niższych częstotliwości, w którym wzmocnienie rośnie z częstotliwością.

Każdemu z tych zakresów częstotliwości przypisujemy osobny układ zastępczy. Obie ze znanych postaci układów zastępczych źródła prądu: sze-

regowa i równoległa, mogą być użyte z powodzeniem. W zakresie średnich częstotliwości opory urojone są w zasadzie do pominięcia. Schemat zastępczy z rys. 5 upraszcza się znacznie (rys. 7). Właś-

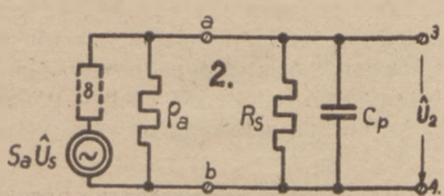


Rys. 7. Schemat zastępczy w zakresie średnich częstotliwości, źródło prądu o stałej SEM-ej.

ciwym oporem obciążenia jest opór siatkowy R_s, jednak należy pamiętać, że w tym zakresie częstotliwości występuje rezonans indukcyjności dławika z całkowitą pojemnością szkodliwą układu:

$$C_p = C_o + C_L + C_s \qquad (4)$$

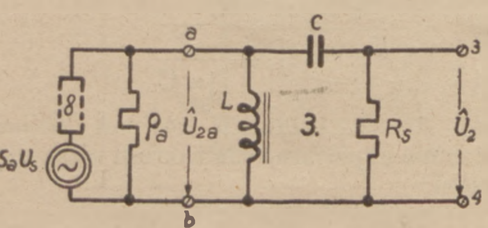
W zakresie częstotliwości wyższych pomijamy wpływ indukcyjności dławika L oraz pojemności sprzęgającej C (rys. 8), w zakresie zaś niższych



Rys. 8. Schemat zastępczy w zakresie wyższych częstotliwości. Źródło prądu o stałej wydajności prądowej.

częstotliwości odpadają pojemności szkodliwe (rys. 9).

Rozpatrzymy teraz kolejno zachowanie się wzmacniacza w tych trzech zakresach częstotliwości.



Rys. 9. Schemat zastępczy w zakresie niższych częstotliwości. Źródło prądu o stałej wydajności prądowej.

6. *Zakres częstotliwości średnich.*

W zakresie częstotliwości średnich wzmocnienie napięciowe według wzoru 3 i schematu zastępczego z rys. 7.

$$k_{u1} = K_a \frac{R_s}{\rho_a + R_s} = \frac{K_a}{1 + \frac{\rho_a}{R_s}} \qquad (5)$$

W innej postaci, odpowiadającej raczej schematowi zastępczemu ze źródłem prądu o stałej wydajności prądowej

$$k_{u1} = S_a \frac{\rho_a \cdot R_s}{\rho_a + R_s} = S_a \cdot R_r \qquad (6)$$

gdzie R_r jest charakterystycznym oporem równoległym układu:

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{R_s} \qquad (7)$$

Wyżej obliczona wartość wzmocnienia odnosi się właściwie tylko do jednej częstotliwości, a mianowicie do częstotliwości rezonansowej obwodu równoległego, złożonego z indukcyjności L i pojemności C_p:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L\,C_p}} \qquad (8)$$

Dla tej częstotliwości opór obwodu jest największy a kąt fazowy oporu równa się zeru.

Obwód LC_p posiada krzywą rezonansu na tyle ostrą, że nie nadawałaby się do wzmacniania szerokiego pasma częstotliwości. Na szczęście obwód ten jest z jednej strony tłumiony oporem R_s a z drugiej strony pracuje ze źródła prądu o stosunkowo małym oporze wewnętrznym ρ wobec oporu obwodu LC_p w rezonansie, co powoduje znane zjawisko pozornego tłumienia obwodu rezonansowego równoległego*). Rezultatem powyższego zjawiska jest stosunkowo płaski przebieg charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości, w zakresie średnich częstotliwości.

7. *Zakres częstotliwości wyższych.*

W tym zakresie częstotliwości ważny jest schemat zastępczy z rys. 8. Napięcie na zaciskach wyjściowych $\hat{U}_2$ równa się iloczynowi prądu wypływającego ze źródła o stałej wydajności prądowej $S_a \cdot \hat{U}_s$ przez opór $\hat{Z}_0$, który stanowi równoległe połączenie wszystkich oporów układu (patrz rys. 8). Wobec tego napięcie na zaciskach wyjściowych

$$\hat{U}_2 = S_a \cdot \hat{U}_s \, \hat{Z}_{02} \qquad (9)$$

a opór

$$\frac{1}{Z_{02}} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{R_s} + j\omega C_p = \frac{1}{R_r} + j\omega C_p \qquad (10)$$

Zatem wzmocnienie napięciowe

*) W skrajnym wypadku zerowej wartości oporu wewnętrznego źródła, napięcie na zmiennym z częstotliwością oporze obwodu rezonansowego równoległego jest stałe i równa się SEM-nej.

$$\widehat{k}_{u2} = \frac{\widehat{U}_2}{\widehat{U}_1} = S_a \widehat{Z}_{02} = \frac{S_a}{\frac{1}{R_r} + j\omega C_p} = \tag{11}$$

$$= \frac{S_a \cdot R_r}{1 + j\omega C_p R_r} = \frac{k_{u1}}{1 - j\frac{R_r}{X_p}} = \frac{k_{u1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_r}{X_p}\right)^2}} e^{j\alpha_2}$$

gdzie

$$X_p = -\frac{1}{\omega C_p} \tag{12}$$

jest oporem pojemności szkodliwych, a

$$\alpha_2 = \text{arc tg} \frac{R_r}{X_p} = -\text{arc tg}\, \omega C_p R_r \tag{13}$$

kątem fazowym wzmocnienia.

Ze znanych zależności trygonometrycznych możemy wyznaczyć:

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_r}{X_o}\right)^2}} \tag{14}$$

co prowadzi do następującej postaci wzoru na wzmocnienie napięciowe [4]

$$\widehat{k}_{u2} = k_{u1} \cdot \cos\alpha_2 \cdot e^{j\alpha_2} \tag{15}$$

Równanie (14) wykazuje w pięknej postaci zależność zniekształceń fazowych od zniekształceń wzmocnienia w funkcji częstotliwości.

Dla pewnej częstotliwości, którą nazywamy górną graniczną ω_g, wzmocnienie napięciowe opada do wartości $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}7$ wartości maksymalnej wzmocnienia (3 dB).

Wówczas

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = -45^0$$

Według równania (13) wynika równość oporów charakterystycznego równoległego R_r oraz oporu pojemności szkodliwych $\frac{1}{\omega_g C_p}$, co prowadzi do wzoru na górną częstotliwość graniczną

$$\omega_g = \frac{1}{R_r C_p} \tag{16}$$

Wzmocnienie napięciowe można przedstawić jeszcze w jednej postaci bardzo łatwej do pamiętania [5]

$$\widehat{k}_{u2} = \frac{k_{u1}}{1 + j\omega C_p R_r} = \frac{k_{u1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} =$$

$$= \frac{k_{u1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} e^{j\alpha_2} \tag{17}$$

gdzie

$$\alpha_2 = -\text{arc tg} \frac{\omega}{\omega_g} \tag{18}$$

Dla częstotliwości znacznie większych od górnej granicznej

$$k_{u2} \cong \frac{\omega_g}{\omega} k_{u1} = \frac{S_a}{\omega C_p} \tag{19}$$

Równania powyższe można zilustrować grupą uniwersalnych charakterystyk Termana [5] podanych na rys. 10, z których prawa część odnosi się do zakresu wyższych częstotliwości.

8. *Zakres częstotliwości niższych.*

W zakresie częstotliwości niższych, mimo tak prostego schematu zastępczego (rys. 9) wzory na wzmocnienie wypadają dość skomplikowane [6] [7]. Wprowadzając pewne uproszczenie, polegające na założeniu, że pojemność C niewiele wpływa na ogólną wartość oporu obciążenia, jak to zwykle bywa w poprawnie zaprojektowanych wzmacniaczach, można wyprowadzić wzory prostsze i łatwiejsze od praktycznego zastosowania. Założenie tak e jest gospodarczo słuszne, gdyż cena odpowiedniego d.awika jest znacznie wyższa od ceny kondensatora. Wobec powyższego schemat zastępczy uprości się do postaci podanej na rys. 11. Napięcie na zaciskach ab (rys. 9 i 11)

$$\widehat{U}_{za} = S_a \widehat{U}_s \widehat{Z}_{03} \tag{20}$$

przy czym

$$\frac{1}{Z_{03}} = \frac{1}{R_r} + \frac{1}{j\omega L} \tag{21}$$

Napięcie wyjściowe $\widehat{U}_2$ wyznacza się z dzielnika napięcia, jaki stanowią opór R_s i pojemność C (rys. 9).

$$\frac{\widehat{U}_2}{\widehat{U}_{za}} = \frac{R_s}{R_s + \frac{1}{j\omega C}} \tag{22}$$

Z tych trzech ostatnich równań obliczamy wzmocnienie napięciowe dla zakresu niższych częstotliwości:

$$\widehat{k}_{u3} = \frac{\widehat{U}_2}{\widehat{U}_s} = \frac{R_s}{R_s + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{S_a}{\frac{1}{R_r} + \frac{1}{j\omega L}} =$$

$$= S_a R_r \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega C R_s}} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{R_r}{\omega L}} = k_u \frac{1}{1 + j\frac{X_c}{R_s}} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{R_r}{X_L}} =$$

$$= k_{u1} \frac{e^{j\alpha''_3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_c}{R_s}\right)^2}} \cdot \frac{e^{j\alpha'_3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_r}{X_L}\right)^2}} \tag{23}$$

gdzie

$$X_c = -\frac{1}{\omega C} \tag{24}$$

$$X_L = \omega L \tag{25}$$

są oporami pojemności sprzęgającej i indukcyjności dławika, a

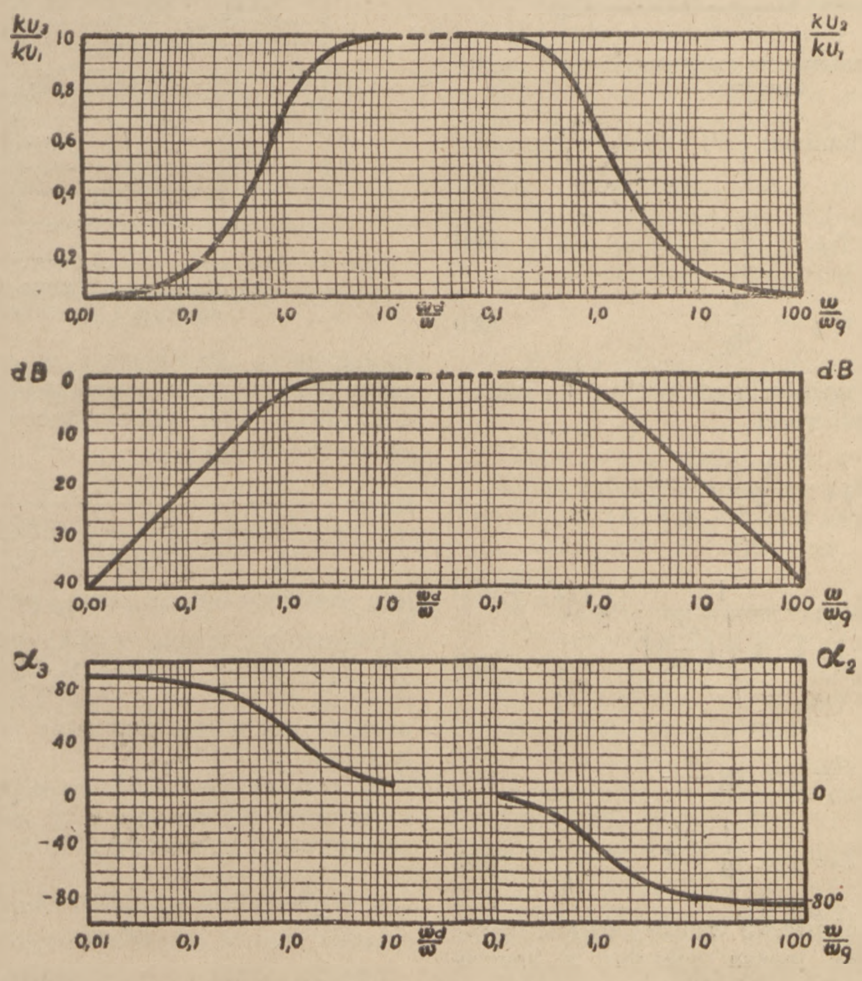
$$\alpha'_3 = \text{arc tg}\,\frac{R_r}{X_L} = \text{arc tg}\,\frac{R_r}{\omega_L} \tag{26}$$

$$\alpha''_3 = -\text{arc tg}\,\frac{X_c}{R_s} = \text{arc tg}\,\frac{1}{\omega C R_s} \tag{27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{X_c}{R_s}\right)^2}} = \cos \alpha''_3 \tag{30}$$

odzwierciadlają spadki wzmocnienia, raz wskutek obciążenia lampy indukcyjnością L, a drugi raz wskutek podziału napięcia na oporze obciążenia lampy między oporem R_s i pojemnością C.

Wobec tego wzór na wzmocnienie napięciowe w zakresie niższych częstotliwości można przedstawić w postaci



Rys. 10. Uniwersalne charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości (Terman).

są cząstkowymi kątami fazowymi. Całkowity kąt fazowy wzmocnienia

$$\alpha_3 = \alpha'_3 + \alpha''_3 \tag{28}$$

Wyrażenia

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R_r}{X_L}\right)^2}} = \cos \alpha'_3 \tag{29}$$

$$\bar{k}_{u3} = \bar{k}_{u1}\,.\,\cos \alpha'_3\,.\,\cos \alpha''_3\; e^{j\alpha_3} \tag{31}$$

Podobnie jak dla zakresu częstotliwości wyższych, możemy wyznaczyć dolną częstotliwość graniczną, ω_d, przy której

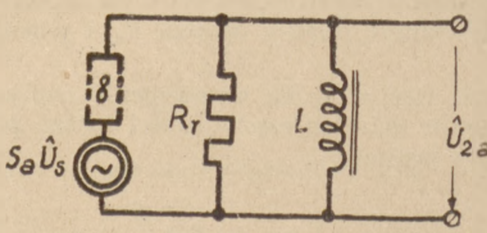
$$\cos \alpha'_3\,.\,\cos \alpha''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{32}$$

Wzór na wzmocnienie napięciowe wygodniej

jest jednak uzależnić od cząstkowych częstotliwości granicznych ω'_d i ω''_d, przy których

$$\cos\alpha'_3 = \cos\alpha''_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{33}$$

Wówczas wynika równość oporów charaktery-



Rys. 11. Opór obciążenia w zakresie niższych częstotliwości

stycznych w równaniach (29) i (30), co prowadzi do zależności:

$$\omega'_d = \frac{R_r}{L} \tag{34}$$

$$\omega''_d = \frac{1}{CR_s} \tag{35}$$

Wobec tego wzmocnienie napięciowe dla zakresu niższych częstotliwości

$$\widehat{k}_{u3} = k_{u1}\,\frac{1}{1-j\dfrac{\omega'_d}{\omega}}\cdot\frac{1}{1-j\dfrac{\omega''_d}{\omega}} =$$

$$= k_{u1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega'_d}{\omega}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega''_d}{\omega}\right)^2}}\cdot e^{j(\alpha'_3+\alpha''_3)} \tag{36}$$

gdzie

$$\alpha'_3 = \text{arc tg}\,\frac{\omega'_d}{\omega} \tag{37}$$

$$\alpha''_3 = \text{arc tg}\,\frac{\omega''_d}{\omega} \tag{38}$$

Wyrażenia ułamkowe we wzorze (36) oraz cząstkowe kąty fazowe można odczytać z lewych części wykresów na rys. 10.

W przypadku małych wartości ilorazu

$$\frac{\omega''_d}{\omega} = \frac{1}{\omega C R_s},$$

co często zachodzi w praktyce, wzór (36) upraszcza się do postaci:

$$\frac{k_{u3}}{k_{u1}} \cong \frac{e^{j\alpha_3}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega'_d}{\omega}\right)^2}} \tag{39}$$

Dla bardzo małych częstotliwości

$$\frac{k_{u3}}{k_{u1}} \cong \frac{\omega}{\omega_d} = \frac{\omega L}{R_r} \tag{40}$$

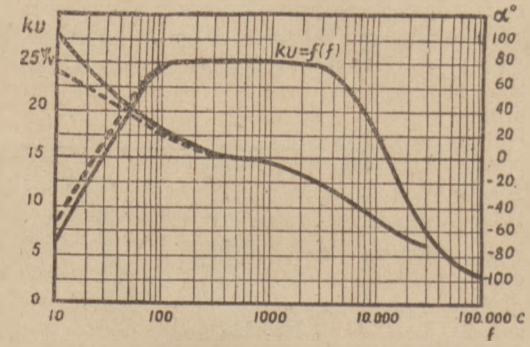
czyli

$$k_{u3} \cong S_a\,\omega L \tag{41}$$

Wzmocnienie rośnie liniowo z częstotliwością.

9. *Przykład.*

Na rys. 12 podany jest przykład obliczenia charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości



Rys. 12. Obliczenie charakterystyki częstotliwości wzmacniacza dławikowego przy pomocy wzorów ścisłego i przybliżonych

wzmacniacza dławikowego w zakresie niższych częstotliwości według wzorów (36) — linie pełne, oraz (39) — linie przerywane. Punkty obliczone ze wzoru ścisłego [7]

$$\widehat{k}_{u3} = \frac{K_a}{1+\dfrac{\rho_a}{R_s}\left(1-\dfrac{1}{\omega^2 LC}\right)\quad j\left(\dfrac{\rho_a}{\omega L}+\dfrac{1}{\omega C R_s}\right)} \tag{42}$$

leżą pomiędzy liniami pełną i przerywaną.

Porównując ze sobą wyniki obliczeń podane na rys. 12 widzimy, że wzór 36 daje minimalne odchylenia od wartości ścisłych i ze względu na swą prostotę jest wielce przydatny do obliczeń praktycznych.

W zakresie średnich częstotliwości korzystano ze wzorów (5) do (8), a w zakresie wyższych częstotliwości ze wzorów (16) do (18).

10. *Wyznaczanie wielkości charakterystycznych układu.*

Zwykle mamy do rozwiązania następujące zagadnienia: dane jest pasmo częstotliwości oraz dopuszczalny spadek wzmocnienia na górnej i dolnej częstotliwości krańcowej tego pasma (rys. 13). Należy wyznaczyć wielkości charakterystyczne układu zależnie od przebiegu charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości. Rozważmy naprzód zakres wyższych częstotliwości. Zakładamy, że dopuszczalny spadek wzmocnienia na częstotliwości kołowej ω_2 wynosi q_2. Na mocy równań (13) do (15)

$$q_2 = \frac{k_{u1}}{k_{u2}} = \frac{1}{\cos\alpha_2} = \sqrt{(1+\omega_2 C_p R_r)^2} \tag{43}$$

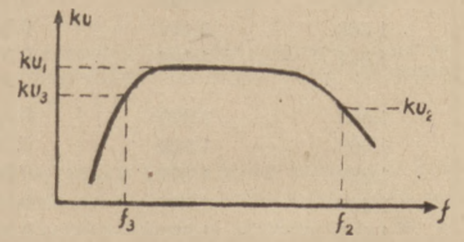
Stąd otrzymamy maksymalną wartość charakterystycznego oporu równoległego

$$R_{r\,max} = \frac{\sqrt{q_2^2 - 1}}{\omega_2\, C_p} \qquad (44)$$

oraz na podstawie wzoru (6) maksymalne wzmocnienie dla danych warunków pracy

$$k_{u\,1\,max} = \frac{S_a}{\omega_2\, C_p} \sqrt{q_2^2 - 1} \qquad (45)$$

Maksymalne wzmocnienie jest proporcjonalne do stosunku nachylenia charakterystyki do sumy pojemności szkodliwych układu.



Rys. 13. Określenie dopuszczalnych spadków wzmocnienia

W zakresie częstotliwości niższych dopuszczalny spadek wzmocnienia oznaczamy przez

$$q_3 = \frac{k_{u\,1}}{k_{u\,3}} = \frac{1}{\cos\alpha'_3\,\cos\alpha''_3} \qquad (46)$$

Spadek ten dzielimy na dwa czynniki, tak zwane cząstkowe spadki wzmocnienia

$$q_3 = q'_3\, q''_3 \qquad (47)$$

dowolnie z teoretycznego punktu widzenia. Według wzorów (29), (30), (46) i (47) cząstkowe spadki wzmocnienia wynoszą

$$q'_3 = \frac{1}{\cos\alpha'_3} = \sqrt{1 + \left(\frac{R_r}{\omega_3 L}\right)^2} \qquad (48)$$

$$q''_3 = \frac{1}{\cos\alpha''_3} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_3\, C\, R_s}\right)^2} \qquad (49)$$

Stąd wyznaczamy minimalną wartość indukcyjności dławika

$$L_{min} = \frac{R_r}{\omega_3 \sqrt{(q'_3)^2 - 1}} \qquad (50)$$

oraz minimalną wartość pojemności kondensatora sprzęgającego

$$C_{min} = \frac{1}{\omega_3\, R_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(q''_3)^2 - 1}} \qquad (51)$$

Z rozważań powyższych wynika następująca kolejność obliczeń: dla danej lampy (K_a, S_a) i warunków pracy ω_2, q_2, ω_3, q_3 szacujemy naprzód pojemność szkodliwą (4) i wyznaczamy charakterystyczny opór równoległy R_r ze wzoru (44). Ze wzoru (7) określamy maksymalną wartość oporu siatkowego R_s która nie może przekroczyć wartości, podanej przez katalog $R_{s\,max}$.

Następnie dzielimy dopuszczalny spadek wzmocnienia na niższych częstotliwościach q_3 na cząstkowe q'_3 i q''_3. Pomocną może być tutaj empiryczna zależność

$$\frac{q'_3 - 1}{q''_3 - 1} \simeq 4 \qquad (52)$$

która łącznie z równaniem (47) pozwoli na obliczenie q'_3 i q''_3. Teraz już można obliczyć L_{min} z równania (50) i C_{min} z równania (51). Z wartością indukcyjności L jest związana pojemność C_L, co pozwala na sprawdzenie, czy pojemność szkodliwa została właściwie założona. W razie zbyt dużych odchyleń należy powtórzyć przeliczenie.

Na koniec należy dodać, że często podaje się spadki wzmocnienia w miarze logarytmicznej, np. w dB. Zastosowanie tabeli 1 ułatwia wówczas obliczenie według wzorów (44), (50) i (51).

11. Wpływ elementów układu na charakterystykę częstotliwości

Wzmocnienie napięciowe w zakresie średnich częstotliwości (5) rośnie ze wzrostem spółczynnika amplifikacji K_a i oporu siatkowego R_s, maleje natomiast ze wzrostem oporu wewnętrznego ρ_a.

W zakresie wyższych częstotliwości (14), (12) i (7) wzmocnienie wykazuje mniejszy spadek przy mniejszych wartościach oporów ρ_a i R_s oraz pojemności szkodliwej C_p. Powiększanie wzmocnienia stopnia następnego k''_{ul} powiększa według wzorów (2) i (4) pojemność szkodliwą C_p.

Wzmocnienie w zakresie niższych częstotliwości (31), (29), (30), (24) i (7) wykazuje mniejszy spadek przy wzroście indukcyjności L i pojemności sprzęgającej C oraz przy maleniu oporu ρ_a. W miarę wzrostu oporu siatkowego wzmocnienie rośnie, gdyż na trzeci człon równania (31), podany w postaci (30), opór R_s wywiera większy wpływ niż na drugi, wyrażony zależnością (29).

Ze względu na to, że pojemność własna dławika C_L zależy od indukcyjności L, więc jej wartość wpływa pośrednio na wzmocnienie na wyższych częstotliwościach. Ze wzrostem indukcyjności pojemność dławika rośnie na ogół (choć przy różnych materiałach i wielkościach rdzeni dławika i różnicach w jego konstrukcji pojemność C_L nie jest związana z indukcyjnością L), wobec czego wzrost indukcyjności L powoduje pogorszenie się charakterystyki na wyższych częstotliwościach.

Wyniki tych rozważań zebrane są w tabelę 2, w której znak (+) oznacza zwiększenie wzmoc-

TABELA I.

dB	q	$\sqrt{q^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2-1}}$	dB	q	$\sqrt{q^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2-1}}$
0 0	1.000	0		3.0	1.413	0.998	1.002
0.1	1.012	0.155	6.451	3.1	1.429	1.020	0.980
0 2	1.023	0 215	4.651	3.2	1.445	1.043	0.958
0.3	1.035	0.266	3.759	3 3	1.462	1 066	0.938
0 4	1.047	0.310	3.225	3.4	1.479	1.089	0.918
0.5	1.059	0 348	2 873	3.5	1.496	1.112	0.899
0.6	1 072	0.386	2 590	3.6	1.514	1.136	0.880
0 7	1.084	0.418	2 392	3.7	1.531	1.159	0.862
0 8	1 096	0.448	2.232	3.8	1.549	1.182	0.846
0.9	1.109	0.479	2.087	3.9	1.567	1.206	0 829
1 0	1.122	0.508	1 968	4.0	1.585	1 229	0.813
1.1	1.135	0 536	1.865	4.1	1.603	1.252	0.798
1.2	1.148	0 563	1.776	4.2	1.622	1.277	0 783
1.3	1 161	0.589	1.697	4.3	1.641	1.301	0.768
1.4	1.175	0.616	1 623	4.4	1.660	1.324	0.755
1.5	1.189	0.643	1.555	4.5	1.679	1.348	0.741
1.6	1.202	0.666	1.501	4.6	1.698	1.372	0.728
1.7	1.216	0.691	1.447	4.7	1.718	1.396	0.716
1.8	1.230	0.716	1.396	4.8	1.738	1 421	0.703
1.9	1.245	0.741	1.349	4.9	1.758	1.445	0.692
2 0	1.259	0.764	1.308	5.0	1.778	1.470	0.680
2.1	1.274	0 789	1.267	5.1	1.799	1.495	0.668
2 2	1.288	0 811	1 233	5.2	1.820	1.520	0 657
2.3	1.303	0.835	1 197	5.3	1 841	1.545	0.647
2.4	1.318	0 858	1 165	5.4	1 862	1.570	0.636
2.5	1334	0.882	1.133	5.5	1 884	1 596	0 626
2 6	1.349	0.905	1.104	5.6	1.905	1.621	0.616
2.7	1.365	0.929	1.076	5.7	1.928	1.648	0.606
2.8	1.380	0.950	1.052	5 8	1.950	1 674	0.597
2.9	1.396	0 974	1.026	5.9	1.972	1.699	0.588
				6.0	1.995	1.726	0.579

nienia lub polepszenia charakterystyki częstotliwości, znak zaś (—) zmniejszenie wzmocnienia lub pogorszenie charakterystyki częstotliwości. Znak (0) oznacza brak wpływu danej zmiennej.

Z rozważań powyższych wynika, że chcąc otrzymać wzmacniacz dławikowy o dobrych własnościach, należy wybrać lampy o małym oporze wewnętrznym.

12. *Elementy odsprzęgające*

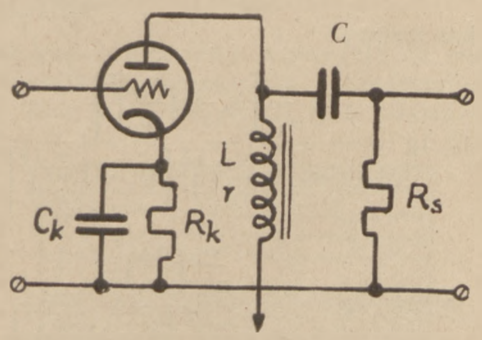
Schemat wzmacniacza dławikowego różni się w praktyce od ideowego, podanego na rys. (2). Ujemne napięcie siatki pobiera się najczęściej ze spadku napięcia składowej stałej prądu anodowego na oporze R_k (rys. 14). Opór ten jest zablokowany kondensatorem C_k, żeby uniknąć spadku napięcia składowej zmiennej prądu anodowego, zmniejszającego wzmocnienie układu.

TABELA II.

Wpływ elementów wzmacniacza dławikowego na charakterystykę częstotliwości

Powiększanie	Dolna częstotliwość graniczna	Wzmocnienie na średnich częst.	Górna częstotliwość graniczna
K_o	0	+	0
ρ_o	—	—	—
L	+	0	0
C_L	0	0	—
C_p	0	0	—
R_s	+	+	—
C	+	0	0
k''_{u1}	0	0	—

Odpowiedni dobór tych wielkości wpływa na charakterystykę częstotliwości w zakresie niższych częstotliwości. Obliczenie charakterystyki często-

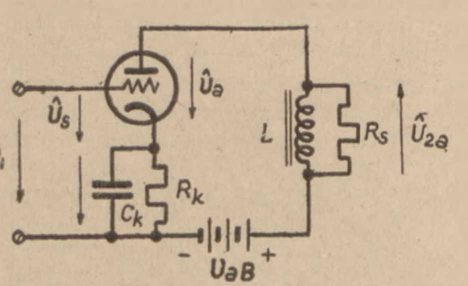


Rys. 14. Pobieranie ujemnego napięcia siatki ze spadku napięcia składowej stałej prądu anodowego.

tliwości wymaga utworzenia schematu zastępczego i wspólnego rozpatrzenia wszystkich wpływów oporów rzeczywistych i urojonych. W praktyce stosuje się często metodę uproszczoną [8], polegającą na rozważaniu wpływu każdego obwodu z osobna i odpowiedniego dodawania wyników obliczeń przez przemnożenie modułu wyliczonego spółczynnika przez wzmocnienie (lub dodanie ich wartości w miarze logarytmicznej) oraz przez dodanie kąta fazowego tego spółczynnika do kąta fazowego wzmocnienia. Należy jednak dodać, że w pewnych, różnych od niżej rozpatrywanego, wypadkach, metoda ta zawodzi [5], dając zbyt duże błędy.

13. *Wpływ oporu i pojemności w obwodzie katodowym na charakterystykę częstotliwości*

Na rysunku 15 podany jest schemat zastępczy wzmacniacza dławikowego, uwzględniający



Rys. 15. Schemat zastępczy przy pobieraniu ujemnego napięcia ze składowej stałej prądu anodowego

wpływ oporu i pojemności w obwodzie katodowym. Na zaciski wejściowe przykładamy napięcie $\hat U_1$. Pod jego wpływem siatka otrzymuje napięcie wzbudzające

$$\hat U_s = \hat U_1 - \hat I_a \hat Z_k \qquad (53)$$

gdzie $\hat Z_k$ jest oporem pozornym równoległego połączenia kondensatora C_k i oporu R_k:

$$\frac{1}{\hat Z_k} = \frac{1}{R_k} + j\omega C_k \qquad (54)$$

Spadek napięcia na oporze $\hat Z_k$ przeciwdziała napięciu $\hat U_1$. Prąd anodowy

$$\hat I_a = \frac{K_a \hat U_s}{\rho_a + \hat Z_a} \qquad (55)$$

gdzie opór obciążenia obwodu anodowego $\hat Z_a$

$$\frac{1}{\hat Z_a} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{j\omega L} \qquad (56)$$

można uzależnić od wzmocnienia napięciowego dla średnich częstotliwości

$$\frac{\hat U_{za}}{\hat U_s} = K_a \frac{\hat Z_a}{\rho_a + \hat Z_a} = \hat k'_{u3} = k_{u1} \cos\alpha'_3 \, e^{j\alpha'_3} \qquad (57)$$

w postaci

$$\hat I_a = \frac{\hat k_{u3} \hat U_s}{\hat Z_a} \qquad (58)$$

Wobec tego napięcie przyłożone na zaciski wejściowe

$$\hat U_1 = \hat U_s + \hat I_a \hat Z_k = \hat U_s \left(1 + \hat k'_{u3} \frac{\hat Z_k}{\hat Z_a}\right) \qquad (59)$$

i stąd spółczynnik, określający spadek wzmocnienia na skutek odsprzężenia prądowego

$$\hat F_k = \frac{\hat U_s}{\hat U_1} = \frac{1}{1 + \hat k'_{u3} \dfrac{\hat Z_k}{\hat Z_a}} \qquad (60)$$

Podstawiając wartości na $\hat Z_k$ i $\hat Z_a$ z równań (54) i (56) otrzymujemy po przekształceniach

$$\hat F_k = \frac{1 + j\omega C_k R_k}{1 + \hat k'_{u3} \dfrac{R_k}{R_s} + j\left(\omega C_k R_k - \dfrac{k'_{u3} R_k}{\omega L}\right)} \qquad (61)$$

W mianowniku tego wyrażenia, człon urojony przechodzi przez zero dla pewnej częstotliwości ω_0, Gdyby licznik był stały i niezależny od częstotliwości, to dla tej częstotliwości spółczynnik F_k osiągnąłby maksimum. Jednak licznik rośnie z częstotliwością, co powoduje, że maksimum spółczynnika F_k przypada dla częstotliwości ω_{max} wyższych od ω_0.

Ponieważ R_s jest rzędu setek kΩ a R_k najwyżej kilku kΩ, więc $\frac{R_k}{R_s} < \frac{1}{100}$, Lampy używane we wzmacniaczach dławikowych posiadają zwykle spółczynnik amplifikacji $K_a \leqslant 30$ V/V, więc wyrażenie

$$k_{u1} \frac{R_k}{R_s} < 0{,}3 \qquad (62)$$

Wprowadzając to uproszczenie otrzymujemy

$$\widehat{F}_k \simeq \frac{1 + j\omega C_k R_k}{1 + \frac{R_k}{\omega L} k_{u1} \cos\alpha'_3 \sin\alpha'_3 + j\left[\omega C_k R_k - \frac{R_k}{\omega L} k_{u1} \cos^2\alpha'_3\right]} \qquad (63)$$

Oznaczamy przez

$$\omega_k = \frac{1}{R_k C_k} \qquad (64)$$

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{R_k}{\omega L} k_{u1} \sin 2\alpha_3 \qquad (65)$$

Poza tym wyznaczamy częstotliwość kołową ω_o przez przyrównanie do zera członu urojonego mianownika wyrażenia 63 i uwzględniając równanie (29):

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_{u1} - R_r^2 \frac{C_k}{L}}{L C_k}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{C_k}{k_{u1}} L}} \qquad (66)$$

Ta ostatnia wielkość wyraża kołową częstotliwość rezonansową obwodu, złożonego z indukcyjności L oraz pojemności $\frac{C_k}{k_{u1}}$. Pojemność C zjawia się zmniejszona k_{u1} **razy ze względu** na to, że występuje równocześnie w obwodzie anodowym, jak i siatkowym; jest więc elementem, na którym występuje odsprzężenie.

Ostatecznie dochodzimy do postaci następującej:

$$\widehat{F}_k = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)}{1 + a_k + j\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)\left[1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right]} \cong$$

$$\cong \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)\left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} \qquad (67)$$

Moduł tego wyrażenia

$$F_k = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}{(1 + a_k)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2}} \cong$$

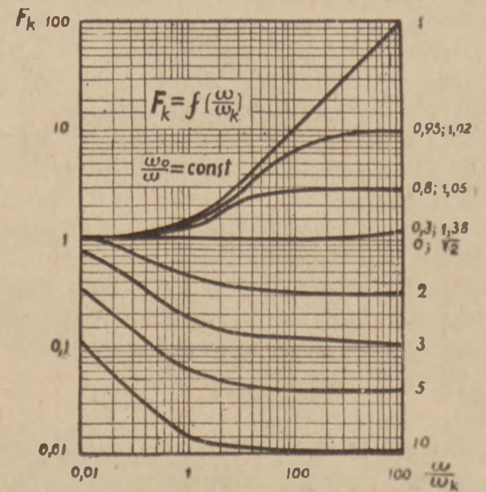
$$\cong \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]}} \qquad (68)$$

a jego kąt fazowy

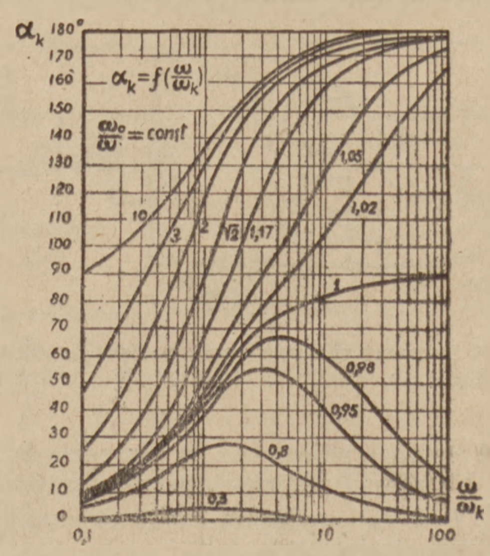
$$\alpha_k = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\omega}{\omega_k}\left[a_k + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]}{1 + a_k + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} \cong$$

$$\cong \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{\omega}{\omega_k}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]} \qquad (69)$$

Wartości spółczynnika F_k oraz jego kąta fazowego α_k w uproszczonej postaci odczytać można z rys. 16 i 17. Krzywe te nie dają jednak obrazu



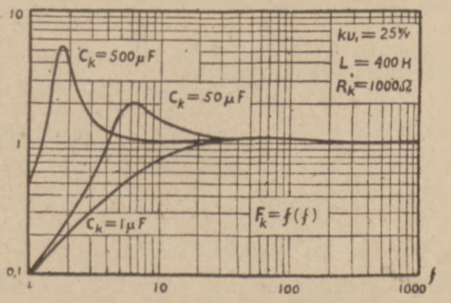
Rys. 16. Spółczynnik spadku wzmocnienia wywołany oporem pozornym w obwodzie katodowym.



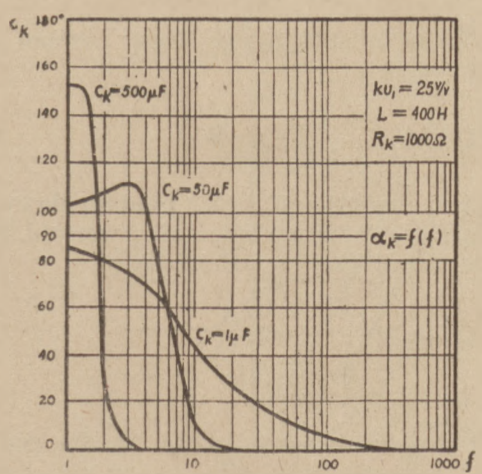
Rys. 17. Kąt fazowy spółczynnika spadku wzmocnienia wywołany oporem pozornym w obwodzie katody.

zależności F_k i α_k od częstotliwości ze względu na to, że częstotliwość zawarta jest w dwóch ilorazach: $\frac{\omega}{\omega_k}$ i $\frac{\omega_0}{\omega}$ stanowiących dwie zmienne niezależne.

Obraz taki można sobie wytworzyć na podstawie konkretnych przykładów, przedstawionych na rys. 18 i 19. Z krzywych tych widzimy, że



Rys. 18. Spółczynnik spadku wzmocnienia wywołany oporem pozornym w obwodzie katody.



Rys. 19. Kąt fazowy spółczynnika spadku wzmocnienia w zależności od częstotliwości.

przez odpowiedni dobór pojemności C_k można uzyskać maksimum spółczynnika F na częstotliwości kołowej ω_{max} leżącej tym niżej, im większą wartość przybiera C_k, przy czym przy niższych wartościach ω_{max} osiąga się większe wartości F_k. Maksimum to może być wykorzystane do polepszenia charakterystyki częstotliwości wzmacniacza zbyt szybko opadającej ze względu na za małą wartość indukcyjności dławika L czy pojemności kondensatora sprzęgającego C.

Jak wynika z rozważanego przykładu przy stosowanych normalnie wartościach elementów duże wartości na F_k otrzymuje się dopiero przy bardzo małych częstotliwościach tak, że w praktyce nie należy się liczyć z wybitnym polepszeniem charakterystyki częstotliwości. Z drugiej jednak strony kąt fazowy ulega w pobliżu maksimum znacznemu wzrostowi (patrz rys. 19), co ma poważny wpływ na zachowanie się wzmacniacza w układzie z odsprzężeniem.

Z tych powodów w praktyce projektuje się układ z możliwie płaskim przebiegiem spółczynnika F_k. Wobec tego należy wybrać możliwie małe wartości ω_k i ω_0 odsuwając częstotliwość rezonansową jak najdalej od pasma wzmacnianych częstotliwości. Wówczas

$$\widehat{F}_k = \frac{1 + j\,\omega\, C_k R_k}{1 + \frac{R_k}{\omega L}\frac{k_{u1}}{2}\sin 2\alpha_3' + j\,\omega\, C_k R_k} =$$

$$= \frac{1 + j\, b_k}{1 + a_k + j\, b_k} \tag{70}$$

Moduł tego spółczynnika

$$F_k = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 C_k^2 R_k^2}{(1 + a_k)^2 + \omega^2 C_k^2 R_k^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + b_k^2}{(1 + a_k)^2 + b_k^2}} \tag{71}$$

i kąt fazowy

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_k\, b_k}{1 + a_k + b_k^2} \tag{72}$$

gdzie

$$b_k = \omega\, C_k R_k \tag{73}$$

Wartości spółczynnika F_k i jego kąta fazowego można odczytać z rys. 20 i 21 dla różnych wartości a_k i b_k.

Jeśli dopuścimy pewną pozostałość wzmocnienia przy częstotliwości ω

$$q_k = \frac{1}{F_k} \tag{74}$$

to dla niej możemy wyznaczyć pojemność C_k

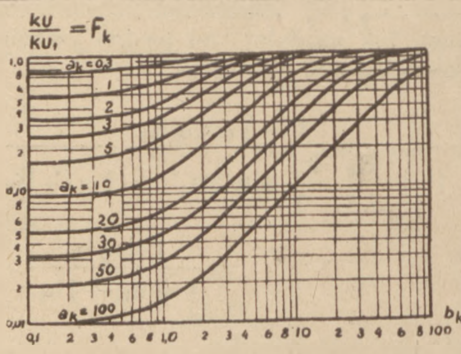
$$C_k = \frac{1}{\omega R_k}\sqrt{\frac{(1 + a_k)^2 - q_k^2}{q_k^2 - 1}} \tag{75}$$

Należy dodać, że wzór (70) i pochodne mają tę samą postać, jak odpowiednie wzory dla wzmacniaczy oporowych [5].

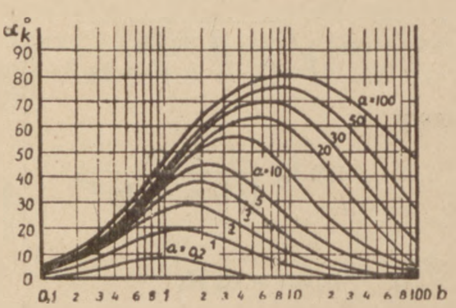
14. Wybór lampy i punktu pracy.

Z równania (5) i tabeli (2) wynika, że punkt pracy należy wybierać przy możliwie małej wartości oporu wewnętrznego lampy; wówczas otrzymujemy duże wartości wzmocnienia i równomierną charakterystykę częstotliwości przy danym oporze obciążenia. Ponieważ opór wewnętrzny jest tym mniejszy im większą wartość posiada prąd anodowy, więc ujemne napięcie siatki winno być możliwie małe, jak tylko pozwala na to napięcie

wzbudzenia. Zwiększenie prądu anodowego może być również dokonane przez stosowanie możliwie dużego napięcia anodowego. Wartość tego ostatniego wybiera się z szeregu wartości znormalizowanych.



Rys. 20. Spółczynnik spadku wzmocnienia F_k



Rys. 21. Kąt fazowy spółczynnika spadku wzmocnienia

Rozważymy jeszcze przypadek, w którym mamy dane napięcie anodowe i siatkowe i szukamy optymalnej wartości spółczynnika amplifikacji K_a

Istnienie maksimum wynika stąd, że spółczynnika amplifikacji nie można dowolnie zwiększać bez równoczesnego zmniejszania nachylenia charakterystyki. W zakresie średnich częstotliwości wzmocnienie wyraża się wzorem (5), który można przepisać w postaci:

$$k_{u\,1} = \frac{R_s}{\frac{1}{S_a} + \frac{R_s}{K_a}} \qquad (76)$$

Maksimum wzmocnienia określa się z równania:

$$\frac{d\,k_{u\,1}}{d\,K_a} = 0 \qquad (77)$$

Ten sam warunek na spółczynnik amplifikacji K_a można łatwiej wyznaczyć z równania

$$\frac{d\left(\frac{1}{k_{u\,1}}\right)}{d\left(\frac{1}{K_a}\right)} = 0 \qquad (78)$$

które daje w wyniku:

$$\frac{d\left(\frac{1}{S_a}\right)}{d\left(\frac{1}{K_a}\right)} = -R_s \qquad (79)$$

Zakładając, że prąd anodowy jest postaci

$$I_{ao} = c\left(U_{so} + \frac{U_{ao}}{K_a}\right)^{3/2} \qquad (80)$$

a nachylenie charakterystyki

$$S_a = \frac{d\,I_a}{d\,U_{so}} = \frac{3}{2} \cdot c\left(U_{so} + \frac{U_{ao}}{K_a}\right)^{1/2} \qquad (81)$$

więc z tych ostatnich równań otrzymamy:

$$\frac{d\left(\frac{1}{S_a}\right)}{d\left(\frac{1}{K_a}\right)} = -\frac{U_{ao}}{3\,c}\left(U_{so} + \frac{U_{ao}}{K_a}\right)^{-3/2} = -\frac{U_{ao}}{3\,I_{ao}} \qquad (82)$$

Porównując ze sobą prawe strony równań (79) i (82) otrzymamy:

$$\frac{U_{ao}}{3\,I_{ao}} = R_s \qquad (83)$$

Rugując z równań (80) i (83) prąd anodowy I_{ao} otrzymujemy ostatecznie optymalną wartość spółczynnika amplifikacji w postaci [9]

$$K_{a\,opt} = \frac{U_{ao}}{\left(\frac{U_{ao}}{3\,c\,R_s}\right)^{2/3} - U_{so}} \qquad (84)$$

Dyskusja wzoru (84) wykazuje, że dla małych amplitud wzbudzających ($\overline{U}_{s\,max} = |U_{so}|$) i dużych wartości oporu R_s stosowanych zwykle w początkowych stopniach wzmacniacza otrzymujemy duże wartości na $K_{a\,opt}$. W dalszych stopniach wzmacniacza mamy do czynienia z większymi amplitudami wzbudzającymi oraz mniejszymi wartościami oporu R_s (duże lampy wymagają małych oporów R_s), więc $K_{a\,opt}$ wypada mniejsze.

Przykład: Lampa o stałej prądu anodowego $c = 1\,mA/V^{3/2}$, pracująca przy napięciach $U_{ao} = 250\,V$ oraz $U_{so} = -4\,V$, obciążona oporem $R_s = 600\,k\Omega$ posiada $K_{a\,opt} = 58{,}5\,V/V$ według wzoru (84). Nachylenie charakterystyki oblicza się ze wzoru (81): $S_a = 1{,}78\,mA/V$, więc $\rho_a = 33\,k\Omega$. Zatem wzmocnienie $k_{u\,1} \cong 55\,V/V$ (wzór 5).

Jeśli natomiast przyjmiemy założenie, że optymalne warunki powstaną w przypadku, gdy opór wewnętrzny ρ_a równa się danemu oporowi obciążenia $R_s = 600\,k\Omega$, to rozwiązując równanie

$$S_a = \frac{3}{2}\,c\left(U_{so} + \frac{U_{ao}}{S_a\,\rho_a}\right)^{1/2} \qquad (85)$$

otrzymamy $S_a = 0{,}09$ mA/V; $K_o = 54$ V/V i $k_{u1} = 27$ V/V. W tym przypadku wzmocnienie jest znacznie mniejsze.

Z rozważań powyższych otrzymamy teoretyczne wartości optymalnego spółczynnika amplifikacji. Ponieważ w praktyce istnieją znormalizowane typy lamp więc najłatwiej jest wybrać odpowiedni typ lampy o tak wielkim spółczynniku amplifikacji, który jeszcze pozwoli na wzmocnienie danego napięcia wzbudzającego $\overline{U}_{s\,max}$.

15. Przykład przeliczenia wzmacniacza dławikowego.

Przeliczyć wzmacniacz dławikowy małej częstotliwości z lampą AC 2, o charakterystyce podanej na rys. 22, wzbudzającą napięciem o amplitudzie 150 V stopień końcowy z lampą o pojemności wejściowej 150 pF i maksymalnej wartości oporu siatkowego $R_{s\,max} = 0{,}3$ MΩ. Dane lampy AC 2 : $C_{ak} = 4{,}5$ pF i $C_{as} = 1{,}7$ pF. Maksymalne napięcie anodowe 250 V. Początek prądu siatki przy $U_s = -1{,}3$ V. Pasmo przenoszonych częstotliwości 30 — 10000 okr./sek. Dopuszczalny spadek napięcia dla częstotliwości krańcowych 0,6 dB.

Rozwiązanie: Układ wzmacniacza projektujemy według rysunku 14. Wybór punktu pracy:

$$U_{ao} = 250 \text{ V}; \; U_{so} = -5{,}5 \text{ V}; \; I_{ao} = 6 \text{ mA}.$$

Dane lampy w punkcie pracy:

$$K_a = 33 \text{ V/V}; \; \rho_a = 13{,}3 \text{ k}\Omega \text{ i } S_a = 2{,}7 \text{ mA/V}.$$

Napięcie baterii anodowej obliczamy oceniając spadek napięcia na oporze rzeczywistym dławika

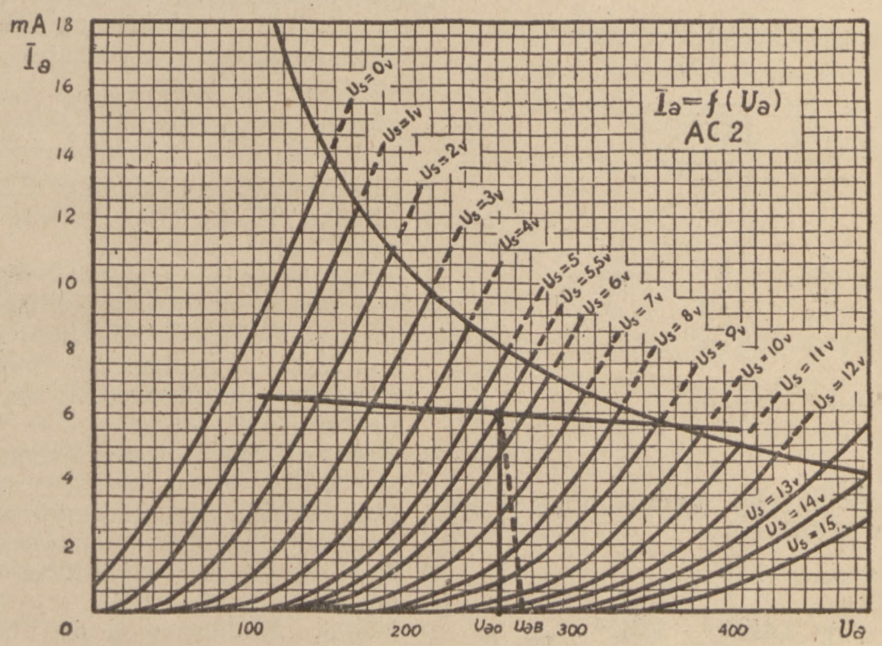
$$r < 0{,}1\,\rho_a = 0{,}1 \cdot 13300\,\Omega = 1330\,\Omega$$

$$U_{oB} = U_{ao} + |U_{so}| + I_{ao} \cdot r = 250 + 5{,}5 + 6 \cdot 1{,}33 \cong 263 \text{ V}$$

Opór katodowy

$$R_k = \frac{|U_{so}|}{I_{ao}} = \frac{5{,}5 \text{ V}}{6 \text{ mA}} = 920\,\Omega$$

Opór obciążenia lampy $R_s = 300$ kΩ. Przez punkt pracy rysujemy charakterystykę tego oporu. Odmierzając na niej w obie strony po 150 V otrzymamy konieczną wartość napięcia wzbudzającego $Us = 5$ V, wobec czego wkraczamy już na prąd siatki pochodzący z szybkości wyjściowej elektronów. Wynika to stąd, że $U_{s\,max} = 0{,}5 \text{ V} > -1{,}3$ V.



Rys. 22. Charakterystyka robocza wzmacniacza dławikowego z lampą AC2.

Gdyby zależało nam na możliwie małych zniekształceniach nieliniowych, to należałoby wzbudzenie ograniczyć do wartości

$$\overline{U}_s = |U_{so}| - 1{,}3 \text{ V} = 5{,}5 \text{ V} - 1{,}3 \text{ V} = 4{,}2 \text{ V}$$

przy czym naturalnie napięcie wyjściowe byłoby odpowiednio mniejsze od 150 V.

Wzmocnienie napięciowe

$$k_{u1} = \frac{150 \text{ V}}{5 \text{ V}} = 30 \text{ V/V}$$

W zakresie częstotliwości niższych indukcyjność L i pojemności C i C_k warunkują przebieg charakterystyki częstotliwości. Zakładamy, że pojemność C_k łącznie z oporem R_k niewiele wpływa na charakterystykę (0,1 dB*) i wobec tego resztę dopuszczalnego spadku wzmocnienia 0,5 dB ($q_3 = q'_3 \cdot q''_3 = 1{,}05$) dzielimy w sposób podany

*) $q_k = 1{,}012$

wzorem (52). Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymujemy $q'_3 = 1.04$ i $q''_3 = 1,01$.

Równoległy opór charakterystyczny (7)

$$R_2 \cong \rho_o = 13,3 \text{ k}\Omega$$

Minimalna indukcyjność dławika (50)

$$L_{min} = \frac{13300}{2\pi 30} \frac{1}{\sqrt{1,04^2 - 1}} = 250 \text{ H}$$

Minimalna pojemność kondensatora sprzęgającego (51)

$$C_{min} = \frac{10^6}{2\pi 30.300000\sqrt{1,01^2 - 1}} \cong 0,125 \mu F$$

Pojemność blokującą opór katodowy obliczamy ze wzoru (75).

Naprzód wyznaczamy z równania (29):

$$\cos \alpha'_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{13300}{2\pi 30.250}\right)^2}} = 0.96$$

lub prościej

$$\cos \alpha'_3 = \frac{1}{q'_2} = \frac{1}{1,04} = 0,96$$

Stąd

$$\sin 2\alpha'_3 = 0,537$$

Z równania (65)

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{920}{2\pi 30.250} 30 \cdot 0,537 = 0,158$$

i na koniec z równania (75)

$$C_k = \frac{10^6}{2\pi 30.920} \sqrt{\frac{1,158^2 - 1,012^2}{1,012^2 - 1}} = 21 \mu F$$

W zakresie wyższych częstotliwości dopuszczalną wartość szkodliwej pojemności obliczamy ze wzoru (44) dla $q_2 = 1,05$ i $f_2 = 10.000$ C

$$C_{p\,max} = \frac{\sqrt{q_2^2 - 1}}{\omega_2 R_r} = \frac{\sqrt{1,05^2 - 1}}{2\pi 10000 . 13300} = 380 \text{ pF}$$

Ponieważ według (1) $C_o = 4,5 + 1,7 + 10 = 16$ pF a według (2) $C_s = 150 + 10 = 160$ pF gdzie założyliśmy $C_{pl} = C_{p\,2} = 10$ pF, więc z równania (4)

$$C_{L\,max} = C_{p\,max} - C_o - C_s = 380 - 16 - 160 = 204 \text{ pF}$$

Teraz możemy zestawić warunki techniczne na dławik: $L \geq 250$ H przy $I_{oo} = 6$ mA i $U_o = 15$ V (jeszcze przy 10 razy mniejszym wzbudzeniu charakterystyka częstotliwości winna odpowiadać żądanym warunkom) $C_L < 204$ pF i $r < 1330\ \Omega$.

Na zakończenie składam podziękowanie p. inż. W. Kacprowskiej i p. S. Ballasowi za pomoc przy wykonywaniu obliczeń.

LITERATURA

1 Groszkowski: Radiotechnika 1932 str. III b 1 i d.
2 Chaffee: Theory of thermionic vacuum tubes str. 417 id.
3 Strutt: Verstärker und Empfänger 1943 str. 15.
4 Day and Russel: Electronics, April 1937 str. 16.
5 Terman, Hewlet, Palmer and Pan: Calculation and design of resistance — coupled amplifiers using pentode tubes. AIEE Transactions 1940 str. 879—884.
6 Henney: Radio Engineers Handbook 1935 str. 368.
7 Dobrowolskij: Mnogokratnyje telegrafno-telefonnyje swiaż. 1938. Część pierwsza str. 94
8 Reich: Theory and applications of electron tubes 1939, str. 187—188.
9 Wallot: „Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik" 1943 str. 27.

Prof. dr inż. JANUSZ GROSZKOWSKI
(Państwowy Instytut Telekomunikacyjny)

Wzory empiryczne dla obliczania katod wolframowych

THE EMPIRICAL FORMULAE FOR THE CALCULATION OF TUNGSTEN CATHODES

Summary.

The calculation of the homogeneous cathode, f.i. of the tungsten one, is usually based on the tables and graphics which give the fundamental properties of the cathode material. The number of factors appearing in these calculations is rather considerable and therefore the calculation can be made only by means of numerous trials and gradual approximation.

The aim of the paper is to replace the table data and graphics by the empirical formulae; these formulae enable the establishment of some important relationships which make very easy the calculation of fundamental dimensions of the cathode according to the desired conditions.

Wstęp. Projektowanie katody jednorodnej, np. wolframowej, przeprowadza się na podstawie tablic lub wykresów, podających zasadnicze właściwości jej materiału. Ilość wielkości, jakie wchodzą tu w grę, jest znaczna, a przez to przeliczenie odbywa się zazwyczaj drogą parokrotnych prób i stopniowych przybliżeń.

Niniejsza praca ma na celu ujęcie danych tablicowych lub wykresów we wzory, pozwalające na wzajemne powiązanie ważniejszych zależności dla ułatwienia szybkiego znalezienia zasadniczych wymiarów i charakterystyk katody w oparciu o przyjęte założenia.

1. *Zasadnicze wielkości charakterystyczne katody jednorodnej*

Obliczenie katod jednorodnych w lampach elektronowych opiera się na znajomości pewnych zasadniczych wielkości, określających własności materiału katody. Głównymi takimi wielkościami są:

opornośc właściwa katody ρ_k ($\mu\Omega$ cm) (1)

emisja elektronowa właściwa $i_{e_{ec}}$ (mA/cm²) (2)

promieniowania właściwe p_k (W/cm²) (3)

parowanie właściwe m_k (g/cm²sek) (4)

wydłużalność właściwa $\frac{\triangle l_k}{l_k}$ (5)

Znajomość tych wielkości pozwala na obliczenie innych wielkości pochodnych (tzw. niezmienników), niezbędnych dla pełnego scharakteryzowania katody.

Oznaczając napięcie żarzenia katody przez U_k (V), prąd żarzenia — przez I_k (A), wyrażamy moc żarzenia jako

$$P_k = U_k I_k = \pi \delta_k l_k p_k \qquad (6)$$

gdzie δ_k jest średnicą drutu katody, l_k jest długością katody.
Stąd

$$\frac{U_k I_k}{l_k \delta_k} = \pi p_k = f_1 (T_k); \qquad (7)$$

T_k jest temperaturą bezwzględną katody (w °K).
Oporność katody wyraża się równaniem

$$R_k = \frac{U_k}{I_k} = \rho_k \frac{l_k}{\pi \frac{\delta_k^2}{4}}, \qquad (8)$$

skąd

$$\frac{U_k \delta_k^2}{I_k l_k} = \frac{4}{\pi} \rho_k = f_2 (T_k). \qquad (9)$$

Mnożąc (7) przez (9), otrzymujemy *niezmiennik napięciowy*

$$U_k \frac{\delta_k^{1/2}}{l_k} = F_1 (T_k). \qquad (10)$$

Dzieląc (7) przez (9), otrzymujemy *niezmiennik prądowy*

$$I_k \frac{1}{\delta_k^{3/2}} = F_2 (T_k) \qquad (11)$$

Prąd emisyjny całkowity z katody będzie

$$I_{ec} = \pi \delta_k l_k i_{ec} = f_3 (T_k). \qquad (12)$$

oraz *wydajnośc katody*

$$W_k = \frac{I_{ec}}{P_k} = \frac{i_{ec}}{p_k} = \frac{f_3 (T_k)}{f_1 (T_k)} = F_3 (T_k) \qquad (13)$$

Trwałość katody τ_k (godz.), określoną jako czas, w ciągu którego średnica katody zmniejszy się — wskutek parowania — o 10%, obliczymy z parowania właściwego m_k oraz średnicy katody δ_k.

Mianowicie, objętość warstwy metalu (rys. 1), który wyparuje, jest

$$v = \pi \delta_k l_k (0{,}05 \delta_k) = 0{,}05 \pi \delta_k^2 l_k \qquad (14)$$

Masa metalu, zawartego w objętości v, przy jego masie właściwej równej $d = 19$ g/cm³, wyniesie

$$M_k = v \cdot d = 0{,}95 \pi 0_k \delta_k^2 l_k \qquad (15)$$

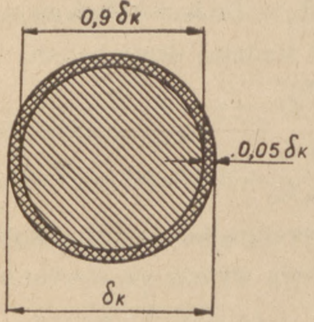
Ponieważ powierzchnia parowania jest

$$S_k = \pi \delta_k \, l_k \,, \qquad (16)$$

przeto czas wyparowania masy M_k — przy parowaniu właściwym m_k — będzie

$$\tau'_k = \frac{M_k}{m_k \, S_k} = \frac{0{,}95 \delta_k}{m_k} \quad \text{(sek)} \qquad (17)$$

Trwałość katody, wyrażona w godzinach, będzie



Rys. 1. Przekrój drutu katody.

Wielkość wydłużenia katody oblicza się z zależności

$$l_{kT} = l_{ko} \left[1 + F_6 (T_k) \right] \qquad (21)$$

Stąd *wydłużalność właściwa*

$$\frac{l_{kT} - l_{ko}}{l_{ko}} = \frac{\triangle l_k}{l_{ko}} = F_6 (T_k) \qquad (22)$$

2. *Wielkości charakterystyczne katody wolframowej*

W tablicy I. podano zależności głównych wielkości charakterystycznych katody wolframowej od temperatury w zakresie temperatur pracy dla katody wolframowej o przekroju kołowym, średnicy δ_k i o długości l_k (większej od 300-krotnej średnicy δ_k, a więc takiej, dla której już można nie brać pod uwagę ostygania końców), znajdującej się w bardzo dobrej próżni.

TABLICA 1.
Wielkości charakterystyczne idealnej katody wolframowej.*)

T_k	ρ_k	i_{ec}	p_k	m_k	$\frac{\Delta l_k}{l_k}$	$V_k \frac{\delta_k^{1/2}}{l_k}$	$I_k \frac{1}{\delta_k^{3/2}}$	W_k	$\frac{\tau_k}{\delta_k}$	$\frac{R_{KT}}{R_{k\,273}}$
°K	μΩcm	mA/cm²	w/cm²	gcm⁻² sek⁻¹		$V_{cm}^{-1/2}$	$A_{cm}^{-3/2}$	mA/W	godz/cm	
2300	66,9	40	46,5	$0{,}8 \cdot 10^{-10}$	$10{,}8 \cdot 10^{-3}$	0,112	1320	0,87	347.10^4	12,19
2400	70,4	114	56,9	$4{,}4 \cdot 10^{-10}$	$11{,}6 \cdot 10^{-3}$	0,128	1422	2,01	63.10^4	12,83
2500	74 0	294	68,8	$20 \cdot 10^{-10}$	$12{,}4 \cdot 10^{-3}$	0,144	1526	4,27	14.10^4	13,47
2600	77,5	706	82.5	$87 \cdot 10^{-10}$	$13{,}2 \cdot 10^{-3}$	0,161	1632	8,56	$3{,}2.10^4$	14 12
2700	81,0	1610	98,2	$312 \cdot 10^{-10}$	$14{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,180	1745	16, 4	$0{,}9.10^4$	14,76

przeto

$$\tau_k \cong \frac{0{,}95 \, \delta_k}{3600 \, m_k} \quad \text{(godz)} \qquad (18)$$

Stąd *niezmiennik trwałościowy*

$$\frac{\tau_k}{\delta_k} \cong \frac{1}{3600 \, m_k} = F_4 (T_k) \qquad (19)$$

Stosunek oporności katody w temperaturze T_k do oporności w temperaturze T_{273} oblicza się na podstawie znajomości oporności właściwej ρ_k danej przez (1), jako

$$\frac{R_{kT}}{R_{k273}} = F_5 (T_k) \qquad (20)$$

3. *Wzory empiryczne dla obliczania ważniejszych wielkości charakterystycznych katody wolframowej*

Niezmiennik napięciowy (1.10) może być wyrażony przy pomocy wzoru

$$U_k \frac{\delta_k^{1/2}}{l_k} = 0{,}168 \left(\frac{T_k}{1000} \right) - 0{,}275 \qquad (1)$$

Błąd wzoru — w granicach 2300° ÷ 2700°K — nie przekracza 1%, spadając do 0,5% w granicach 2500 ÷ 2600°K, jak to wynika z tabl. 2.

*) wg Jones'a i Langmuir'a, Gen. El. Rev., 30, 1927 s. 312), (przeliczone na 1 cm² powierzchni katody).

Niezmiennik prądowy (1.11) może być wyrażony wzorem

$$I_k \frac{1}{\delta_k^{3/2}} = T_k - 975 \qquad (2)$$

Błąd dla zakresu 2300 ÷ 2700°K nie przekracza tu 1%, spadając dla 2500 ÷ 2800°K do 0,3% (p. tabl. 2).

Błąd w węższych granicach temperatur — rzędu 2% (p. tabl. 3).

Wydajność katody (tj. stosunek prądu emisyjnego całkowitego do mocy żarzenia) daje się wyrazić wzorami

$$W_k = 0{,}0044 \left(\frac{T_k - 2300}{100}\right)^4 \qquad (7)$$

TABLICA 2.

T_k	U_k Tablica	U_k Wzór (3.1)	Błąd	I_k Tablica	I_k Wzór (3.2)	Błąd	p_k Tablica	p_k Wzór (3.4)	Błąd	p_k Wzór (3.5)	Błąd
°K	$V\,cm^{-1/2}$	$V\,cm^{-1/2}$	%	$A\,cm^{-3/2}$	$A\,cm^{-3/2}$	%	W/cm^2	W/cm^2	%	W/cm^2	%
2300	0,112	0,111	— 1	1320	1325	0.4	46,5	44,1	− 5	47,5	2
2400	0,128	0,128	0,4	1422	1425	0,4	56,9	56,7	— 0,4	57,0	0,2
2500	0,144	0,145	0,5	1526	1525	0	68,8	69,8	0,7	68,5	−0.5
2600	0,161	0,161	— 0,1	1632	1625	− 0,3	82,5	82,0	— 0,5	82,0	— 0,6
2700	0.180	0,179	— 0,4	1745	1725	− 1	98,2	94,5	- 4	98,5	0 3

Z równań (1) i (2), eliminując T_k możemy wyrazić charakterystykę oporności katody, tj. zależność między prądem żarzenia I_k a napięciem żarzenia U_k, przy pomocy równania

$$I_k = 665\,\delta_k^{3/2}\left(1 + 8{,}95\,U_k \left(\frac{\delta_k}{I_k}\right)^{3/2}\right) \cong$$

$$\cong 660\,\delta_k^{3/2}\left(1 + 9\,U_k \left(\frac{\delta_k}{I_k}\right)^{3/2}\right) \qquad (3)$$

Błąd, w granicach stosowalności wzorów (1) i (2), jest rzędu 1%.

Promieniowanie właściwe (tj. moc żarzenia, potrzebną do wytworzenia temperatury T_k na 1 cm² powierzchni katody) można wyrazić zależnością

$$p_k = 0{,}126\,(T_k - 1950) \qquad (4)$$

albo

$$p_k = 47{,}5 \,.\, 1{,}2^{\left(\frac{T_k - 2300}{100}\right)} \qquad (5)$$

Błąd obu wzorów, w węższych granicach temperatur, jest mniejszy od 1% (p. tabl. 2).

Emisję elektronową właściwą (t.j prąd emisyjny całkowity z 1 cm² katody) można wyrazić wzorem

$$i_{ec} = 50 \,.\, 2{,}4^{\left(\frac{T_k - 2300}{100}\right)} \qquad (6)$$

$$W_k = 2{,}05^{\left(\frac{T_k - 2300}{100}\right)} \qquad (8)$$

Błąd obu wzorów dla $T_k = 2500 \div 2600°K$ jest rzędu 2% (p. tabl. 2).

Z (8) znajdujemy

$$T_k = 2300 + 320\,lg\,W_k \qquad (9)$$

Parowanie właściwe (tj. masę wolframu, parującą w ciągu *1 sek z 1 cm²* powierzchni), wyrażamy wzorem

$$m_k = 1{,}1 \,.\, 10^{-10}\, 4{,}2^{\left(\frac{T_k - 2300}{100}\right)} \qquad (10)$$

Trwałość katody — zgodnie z (2.18) — będzie więc

$$\tau_k = \frac{2{,}5 \,.\, 10^6\,\delta_k}{4{,}2^{\left(\frac{T_k - 2800}{100}\right)}} \qquad (11)$$

Trwałość τ_k możemy wyrazić również przy pomocy wydajności W_k, określając stąd wykładnik potęgi

$$\frac{T_k - 2300}{100} = \frac{lg\,W_k}{lg\,2{,}05} = 3{,}2\,lg\,W_k \qquad (12)$$

Podobnie, przez zlogarytmowanie (1.1), znajdziemy

$$\frac{T_k - 2300}{100} = 1{,}61\ lg\ \frac{2{,}5\ .\ 10^6\ \delta_k}{\tau_k} \qquad (13)$$

Porównując (12) i (13), otrzymamy

$$3{,}2\ lg\ W_k = 1{,}61\ lg\ \frac{2{,}5\ .\ 10^6\ .\ \delta_k}{\tau_k} \qquad (14)$$

czyli

$$W_k^{\ 2} = 2{,}5\ .\ 10^6 \frac{\delta_k}{\tau_k} \qquad (15)$$

albo

$$W_k = 1{,}58\ .\ 10^3 \frac{\delta_k^{\ 1/2}}{\tau_k^{\ 1/2}} \qquad (16)$$

Wykresy na rys. 2 przedstawiają zależność

$$\delta_k \text{ w funkcji } \frac{I_{ec}\ \tau_k^{\ 1/2}}{l_k}$$

z q jako parametrem w zakresie

$$\delta_k = 0{,}001 - 1{,}0 \qquad \text{(cm)}$$
$$q = 6 \div 14 \qquad \text{(V/cm)}$$
$$\frac{I_{ec}\ \tau_k^{\ 1/2}}{l_k} = 10 \div 10^7 \qquad (mA\ \text{godz}^{\ 1/2}\ \text{cm}^{-1})$$

Równanie (21) pozwala na szybkie wyznaczenie zasadniczych wymiarów katody, odpowiadającej danym założeniom.

TABLICA 3.

T_k	i_{ec}			W_k					m_k		
	Tablica	Wzór (3.6)	Błąd	Tablica	Wzór (3.7)	Błąd	Wzór (3.8)	Błąd	Tablica	Wzór (3.10)	Błąd
^0K	mA/cm²	mA/cm²	%	mA/W	mA/W	%	mA/W	%	g cm⁻² sek⁻¹	g cm⁻² sek⁻¹	%
2300	40	50	20	0,87	0,75	−15	1,0	15	$0{,}8\ .\ 10^{-10}$	$1{,}1\ .\ 10^{-10}$	35
2400	114	120	6	2,01	1,98	− 1,5	2,05	2	$4{,}4\ .\ 10^{-10}$	$4{,}6\ .\ 10^{-10}$	4
2500	294	288	−2	4,27	9 35	1,6	4,2	−2	$20\ .\ 10^{-10}$	$19{,}4\ .\ 10^{-10}$	−3
2600	706	690	−2	8,56	8,35	− 2,5	8,6	3	$87\ .\ 10^{-10}$	$81\ .\ 10^{-10}$	− 6
2700	1610	1655	3	16,4	14,7	− 10	17 5	15	$312\ .\ 10^{-10}$	$338\ .\ 10^{-10}$	8

Mnożąc obie strony równania (3) przez U_k otrzymujemy wyrażenie na *moc żarzenia*

$$P_k = U_k\ I_k = 660\ U_k \left(1 + 9\ U_k \frac{\delta_k^{\ 1/2}}{l_k} \right) \delta_k^{\ 3/2} \qquad (17)$$

Ponieważ — zgodnie z (1.13) — jest

$$P_k\ W_k = I_{ec} \qquad (18)$$

więc uwzględniając (16) i (17) w (18), dostaniemy

$$660\ .\ U_k \left(1 + 9\ U_k \frac{\delta_k^{\ 1/2}}{l_k}\right) \delta_k^{\ 3/2}\ .$$
$$1{,}58\ .\ 10^6 \frac{\delta_k^{\ 1/2}}{\tau_k^{\ 1/2}} = I_{ec} \qquad (19)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$q = 9 \frac{U_k}{I_k} \qquad (20)$$

po przekształceniu napiszemy (19) w postaci

$$0{,}116\ .\ 10^6\ .\ q\ \delta_k^{\ 2} (1 + q\ \delta_k^{\ 1/2}) = \frac{I_{ec}\ \tau_k^{\ 1/2}}{l_k} \qquad (21)$$

4. Uwzględnienie ostygania końców katody.

Napięcie żarzenia katody rzeczywistej, czyli napięcie robocze U_k' jest mniejsze od napięcia żarzenia katody idealnej (napięcia obliczeniowego) U_k, a mianowicie:

$$U_k' = U_k - \triangle U_k\ . \qquad (1)$$

Według Langmuir'a

$$\triangle U_k = 0{,}00026\ (T_k - 1{,}3\ T_o)\ , \qquad (2)$$

gdzie T_0 jest temperaturą zamocowań katody.

Przyjmując średnio

$$T_k = 2550^0 \qquad T_o = 350^0,$$

znajdziemy

$$\triangle U_k = 0{,}55\ \text{V}\ , \qquad (3)$$

a przeto

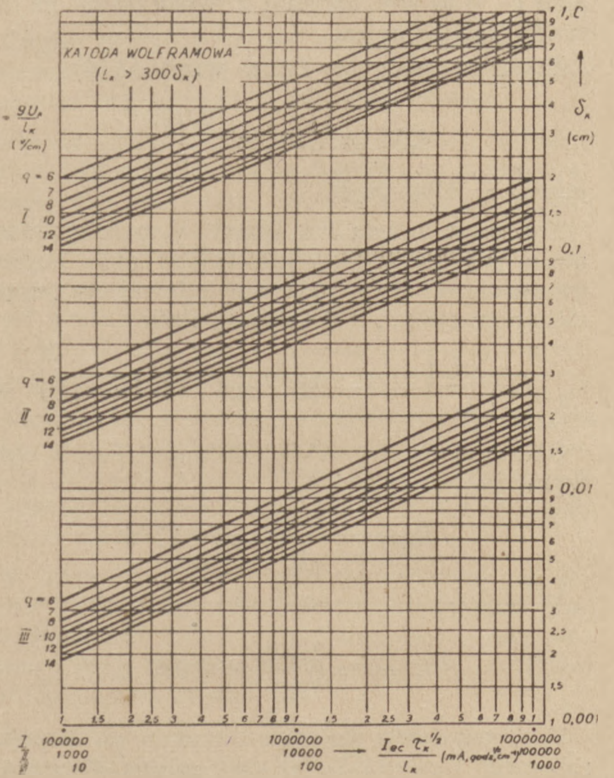
$$U_k' = U_k - 0{,}55\ . \qquad (4)$$

Prąd emisyjny całkowity roboczy wg Langmuir'a wyraża się równaniem

$$I_{ec}' = I_{ec} - \triangle I_{ec}\ . \qquad (5)$$

gdzie I_{ec} jest tu prądem obliczeniowym

$$\triangle I_{ec} = \frac{\triangle U_e}{U_k} I_{ec}, \tag{6}$$



Rys. 2. Zależność średnicy drutu katody δ_k w funkcji $\frac{I_{ec}\,\tau_k^{1/3}}{l_k}$

przy czym

$$\triangle U_{ec} = 0{,}00034\ T_k\,\Psi - 0{,}1, \tag{7}$$

zaś

$$\Psi = f\left(2 + \frac{B_o}{T_k}\right). \tag{8}$$

B_o jest tu stałą Dushman'a.

Wartości funkcji (8) podane są w tablicy 4.

Przyjmując dla wolframu $T_k = 2550^0$ K, $B_0 = 52500$, otrzymamy $\Psi = 2{,}55$, a więc

$$\triangle U_e = 2{,}1. \tag{9}$$

W ten sposób wzór (6) napiszemy

$$I_{ec}' = I_{ec}\left(1 - \frac{2{,}1}{U_k}\right) \tag{10}$$

Obliczenie katody przeprowadza się więc dla wielkości

$$U_k = U_k' + 0{,}55 \tag{11}$$

oraz

$$I_{ec} = \frac{I'_{ec}}{1 - \frac{2{,}1}{U_k}} \tag{12}$$

Wielkości obliczeniowe są więc nieco większe od roboczych.

5. *Przykłady.*

51. Zaprojektować katodę wolframową dla lampy elektronowej o danych roboczych:

$U_k' = 12$ V, $l_k = 14$ cm, $I_{ec}' = 400$ mA, $\tau_k = 2500$ godz.

Znajdujemy napięcie żarzenia obliczeniowe z (4.11)

$$U_k = 12 + 0{,}55 = 12{,}55 \text{ V}.$$

Prąd emisyjny obliczeniowy — zgodnie z (4.12) — będzie

$$I_{ec} = \frac{400}{1 - \frac{2{,}1}{12{,}55}} = 480 \text{ mA}$$

Stosownie do (3.20) jest

$$q = 9\ \frac{12{,}55}{14} = 8{,}1$$

Prawa strona wzoru (3.21) daje

$$\frac{I_{ec}\,\tau_k}{l_k} = \frac{580 \cdot 2500}{14} = 1700$$

Z tablicy 2 znajdujemy dla $q = 8{,}1$ oraz dla wartości 1700 średnicę katody

$$\delta_k = 2{,}75 \cdot 0{,}01 = 0{,}0275 \text{ cm}.$$

Prąd żarzenia będzie (3.3)

$$I_k = 660 \cdot 0{,}0275^{3/2}\,(1 + 8{,}1 \cdot 0{,}0275^{1/2}) = 6{,}95 \text{ A}$$

Moc żarzenia obliczeniowa

$$P_k = 12{,}55 \cdot 6{,}95 = 88 \text{ W}$$

Wydajność katody

$$W_k = \frac{480}{88} = 5{,}45 \text{ mA/W}$$

TABLICA 4.

$\left(2 + \frac{B_0}{T_k}\right)$	20	20,5	21	21,5	22	22,5	23	23 5	24
Ψ	2,47	2,485	2,5	2,515	2,53	2,545	2,56	2,57	2,58

Temperatura katody (3.9)

$$T_k = 2300 + 320\, lg\, 5{,}5 = 2535\,^0K$$

52. Przeliczyć katodę diody prostowniczej typu MR 2 (Marconi's W. T. Co Ltd). Dane katalogowe dotyczące tej katody są następujące:
Napięcie $U_k' = 17{,}0$ V ; prąd żarzenia $I_k = 15{,}0$ A; prąd emisyjny całkowity $I_{ec}' = 1000$ mA.
(Długość katody (kształtu V) określona na podstawie rysunku lampy $l_k = 25$ cm).

Charakterystyki katody (prąd żarzenia i prąd emisyjny całkowity) w zależności od napięcia żarzenia podane w katalogu, przedstawia rys. 3.

Znajdujemy wielkości obliczeniowe

$$U_k = 17{,}0 + 0{,}55 = 17{,}55\text{ V}$$

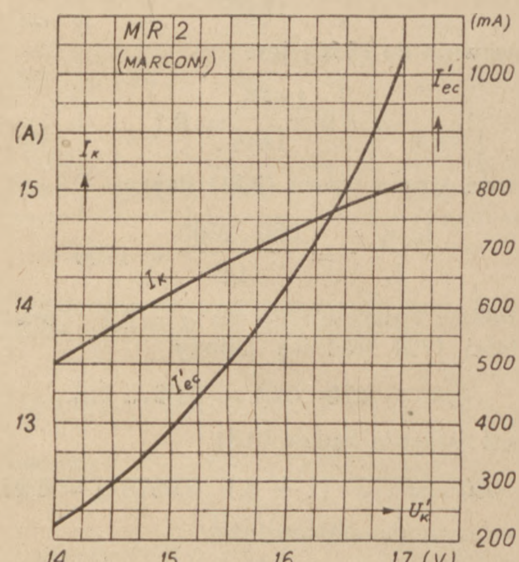
$$I_{ec} = \frac{1000}{1 - \frac{2{,}1}{17{,}55}} = 1140\text{ mA}$$

Moc żarzenia

$$P_k = 17{,}55 \,.\, 15{,}0 = 263\text{ W}$$

Wydajność katody

$$W_k = \frac{1140}{263} = 4{,}35\text{ mA/W}$$



Rys. 3. Charakterystyki katody w zależności od napięcia żarzenia.

Temperatura katody

$$T_k = 2300 + 320\, lg\, 4{,}35 = 2510^0 K$$

Średnica katody z (3.2)

$$\frac{15{,}0}{\delta_k^{3/2}} = 2510 - 975 = 1535$$

wynosi $\delta_k = 0{,}046$ cm

Ze wzoru (3.1) obliczymy długość katody

$$\frac{17{,}55}{l_k} \,.\, 0{,}046^{1/2} = 0{,}168\,\frac{2510}{1000} - 0{,}275$$

jako $l_k = 25$ cm, zgodnie z wymiarami na rysunku katalogowym.

Trwałość obliczymy np. ze wzoru (3.16)

$$4{,}35 = 1{,}58 \,.\, 10^3\, \frac{0{,}046^{1/2}}{\tau_k^{1/2}}$$

jako $\tau_k = 6000$ godz.

Ponieważ katoda ma kształt V, przeto przesunięcie punktu zawieszenia katody przy nagrzewaniu się od temperatury pokojowej do temperatury pracy ($T_k = 2500^0$), wyniesie

$$\frac{1}{2}\, l_k \left(\frac{\Delta l_k}{l_k}\right) = \frac{1}{2} \,.\, 25 \,.\, 12{,}4 \,.\, 10^{-3} = 0{,}155\text{ cm.}$$

Oporność katody w temperaturze pracy obliczymy jako

$$R_{k270} = \frac{17{,}55}{15} = 1{,}17\ \Omega$$

W temeperaturze pokojowej będzie ona

$$R_{k\ 273} = \frac{1{,}17}{13{,}5} = 0{,}087\ \Omega$$

Przy obniżeniu napięcia żarzenia do napięcia roboczego $U_k = 14$ V, (tj. do napięcia obliczeniowego $U_k = 14{,}55$ V) otrzymamy prąd żarzenia

$$I_k = 660 \,.\, 0{,}046^{3/2}\left(1 + 9\,\frac{14{,}55}{25} \,.\, 0{,}046^{1/2}\right) = 13{,}55\ A,$$

co zgadza się z charakterystyką na rys. 3.

Dla określenia prądu emisyjnego całkowitego odpowiadającego temu napięciu, znajdujemy

$$P_k = 14{,}55 \,.\, 13{,}55 = 196\text{ W}$$

Temperatura katody z (3.2)

$$T_k = 975 + \frac{13{,}55}{0{,}046^{3/2}} = 2345^0\text{ K}$$

Wydajność katody

$$W_k = 2{,}05^{\left(\frac{2345 - 2300}{100}\right)} = 1{,}38\text{ mA/W}$$

Prąd emisyjny całkowity obliczeniowy

$$I_{ec} = 1{,}38 \,.\, 196 = 270\text{ mA}$$

Prąd roboczy

$$I_{ec}' = 270\left(1 - \frac{2{,}1}{14{,}55}\right) = 230\text{ mA}$$

zgodnie z charakterystyką.

Dr inż WITOLD HRYSZKIEWICZ

Uogólnione prawo Ohma

Zanim przejdziemy do właściwego tematu — nowego uogólnienia prawa Ohma — rozważmy pokrótce istotną treść tego słynnego prawa.

Prawo Ohma w nauce elektrotechniki zajmuje jedno z czołowych miejsc dlatego, że forma matematyczna zależności liniowej pomiędzy prądem a napięciem zostaje zachowana przez wszystkie możliwe interpretacje fizyczne prądu i napięcia: prąd stały, prąd harmonicznie zmienny, prąd chwilowy, prąd ustalony — wreszcie impulsy prądu i napięcia, spotykane w nowoczesnych zagadnieniach telekomunikacyjnych.

Niezmienność formy matematycznej zostaje także zachowana przy zmianie układu współrzędnych, którymi w teorii obwodów elektrycznych są prądy w ilości równej ilości stopni swobody danego układu elektrodynamicznego.

W rozważaniach naszych ograniczymy się jedynie do teorii obwodów elektrycznych, choć prawo Ohma, przynajmniej pod względem formy matematycznej znajduje także miejsce w teorii pól elektromagnetycznych.

Rozważmy przede wszystkim samo prawo Ohma oraz dawniejsze jego uogólnienia.

Prawo Ohma zostało ogłoszone w 1827 r. na podstawie znanych doświadczeń z przewodnikami różnego kształtu i materiału, utrzymywanych w stałej temperaturze.

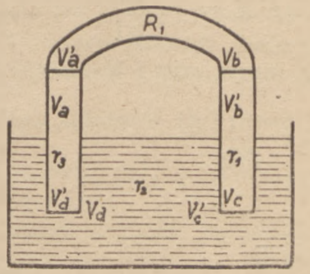
Mierząc różnicę potencjałów na zaciskach badanego przewodnika oraz natężenie prądu przezeń przepływającego, Ohm stwierdził doświadczalnie, że w granicach błędu pomiaru zawsze ma miejsce zależność:

$$V_a - V_b = R\,I; \quad R = \rho \frac{l}{s}; \tag{1}$$

Na podstawie doświadczeń ze stosem Volty, Ohm wprowadził definicję SEM, jako sumę nieciągłości potencjału wzdłuż poszczególnych elementów stosu, gdy stos nie dostarcza prądu do obwodu zewnętrznego.

Gdy zaciski stosu zostają połączone za pomocą przewodnika zewnętrznego, w obwodzie tak utworzonym popłynie prąd, potencjały na zaciskach ulegną zmianie, lecz suma nieciągłości potencjałów w obwodzie pozostanie niezmienna, gdyż obwód zewnętrzny nie wchodzi nigdzie w reakcję chemiczną z substancjami, z których stos jest wykonany

Rozważmy obwód złożony z następujących części: elektroda +, opór zewnętrzny, elektroda —, elektrolit. Mamy tu 4 powierzchnie styku. Oznaczając potencjały po obu stronach powierzchni A przez Va i $V'a$, itd. na podstawie zależności (1) mamy:



$$\begin{aligned} V'_a - V_b &= R_1 I \\ V'_b - V_c &= r_1 I \\ V'_c - V_d &= r_2 I \\ V'_d - V_a &= r_3 I \\ \hline (V'_c - V_c) + (V'_b - V_b) &= (R_1 + r_1 + r_2 + r_3) I \\ E &= R I \end{aligned}$$

$V'a = Va$ oraz $V'b = Vb$, gdyż tu nie ma reakcji chemicznej, czyli suma nieciągłości potencjałów na skutek reakcji chemicznych jest równa sumie spadków napięć w całym obwodzie.

Forma matematyczna

$$E = RI \tag{2}$$

gdzie R jest opornością całego obwodu, wyraża proporcjonalność pomiędzy E i I, przy czym R nie zależy od tych wielkości fizycznych.

Doświadczalne to prawo można także uzasadnić na podstawie współczesnej teorii elektronowej, jak następuje:

Oznaczając przez:

N — ilość elektronów swobodnych zawartych w jednostce długości przewodnika o stałym przekroju,

e — ładunek elektronu,

u — średnią szybkość postępową wszystkich N elektronów.

Nmu jest ilością ruchu powyższego zbioru elektronów; doznają one przyśpieszenia pod wpływem pola elektrycznego o natężeniu X, przy czym siła przyśpieszająca całość wyniesie XNe; doznają one także opóźnienia wskutek ciągłych kolizji, przy czym siła opóźniająca jest proporcjonalna do ilości N oraz szybkości u, czyli cała siła opóźniająca ruch postępowy zbioru elektronów wynosi $\gamma\, Nu$, gdzie γ oznacza współczynnik proporcjonalności. Ponieważ siła jest równa masie przez przyśpieszenie,

$$\frac{d}{dt}(Nmu) = X\,Ne - \gamma\,Nu$$

Ponieważ natężenie prądu $i = Neu$

$$\frac{m}{e}\,\frac{di}{dt} = X\,Ne - \gamma\,Nu$$

czyli

$$\frac{di}{dt} = \frac{Ne^2}{m}\left(X - \frac{\gamma}{Ne^2}\, i\right) \qquad (3)$$

Prąd przestanie wzrastać gdy $\frac{di}{dt} = o$, czyli

$$i = \frac{Ne^2}{\gamma} X$$

Z drugiej strony $X = -\frac{dV}{dl}$

czyli w stanie ruchu ustalonego, gdy $i = \text{const.}$

$$\frac{dV}{dl} = -i\,\frac{\gamma}{Ne^2}$$

czyli

$$V_a - V_b = i' \int_a^b \frac{\gamma\, dl}{Ne^2} \qquad i' = -i \qquad (4)$$

Oznaczając

$$R = \int_a^b \frac{\gamma\, dl}{Ne^2}$$

mamy

$$Va - Vb = i'R$$

czyli zależność liniową pomiędzy $(Va - Vb)$ oraz i'.

Wnioski z powyższej teorii potwierdzone doświadczalnie są następujące:

(I) Prawo Ohma jest słuszne tylko dla stanu ustalonego ruchu wielkiej ilości elektronów.

(II) Ładunki w przewodniku nie mogą się gromadzić.

Prawo Ohma jest słuszne dla elektrolitów, lecz traci ważność dla gazów.

Prawa Kirchhoffa stanowią konsekwencję logiczną prawa Ohma. Skoro ładunki w przewodniku nie mogą się gromadzić, przeto w każdym punkcie rozgałęzienia prądów sieci

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \qquad (5)$$

Jednocześnie wskutek liniowości układu, z punktu widzenia matematycznego musimy mieć dla każdego, dowolnie obranego obwodu zamkniętego w sieci

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k = \sum \text{nieciągłości potencjału}$$

wskutek reakcji chemicznych na granicy odnośnych powierzchni czyli

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k \qquad (6)$$

Prawa powyższe w swej postaci pierwotnej dotyczą zagadnienia rozpływu prądów w przypadku bardzo specjalnym, mianowicie w przypadku prądu stałego.

W przypadku ogólnym prąd jest funkcją czasu, wskutek czego oprócz *SEM* baterii musimy uwzględnić *SEM* indukowane przez wszystkie prądy w sieci na zasadzie prawa indukcji elektromagnetycznej Faraday'a, jak również różnice potencjałów, powstające pomiędzy powierzchniami odgradzającymi przewodniki od dielektryków.

Wszystkie znane zjawiska elektromagnetyczne, jakie mogą zajść w układach przewodników i dielektryków, sformułowane zostały w teorii klasycznej za pomocą znanych równań Maxwell'a.

W teorii obwodów elektrycznych, która obejmuje bardzo wielką ilość zagadnień praktycznych nie ma potrzeby posługiwania się równaniami Maxwell'a, ponieważ dostateczne przybliżenie otrzymujemy zastępując przestrzenny układ elektromagnetyczny przez układ płaski, w którym prądy i potencjały stają się funkcjami wyłącznie czasu, nie zaś czasu i przestrzeni. Idealizacja taka pociąga za sobą szereg uproszczeń i prowadzi do przyjęcia pewnych *fikcji* matematycznych w postaci t.zw. stałych skupionych *R, L, C*, które nie zależą od czasu, ani też od prądów przez nie przepływających, jak i napięć występujących na tych elementach obwodu. Fikcyjność pojęć *R, L, C*, polega przede wszystkim na tym, że w żadnej części obwodu parametry te nie występują pojedyńczo.

Ścisłego rozgraniczenia teorii pól od teorii obwodów nie ma; ogólnie biorąc, można zgrubsza przyjąć;, że jeśli największy wymiar geometryczny układu jest mały w porównaniu do długości fali prądu lub napięcia w stanie ustalonym, zagadnienie może być potraktowane matematycznie za pomocą funkcji jednej zmiennej niezależnej, mianowicie czasu.

Punktem wyjścia w teorii obwodów jest równanie zasadnicze dla pojedyńczego obwodu ze stałymi skupionymi *R, L, C,*:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt = E\,; \qquad (7)$$

$$E(t),\quad I(t).$$

Ważnym w praktyce jest przypadek, gdy $E(t)$ jest funkcją harmoniczną czasu, t.j. funkcją sinus lub cosinus. Równanie (7) dla prądu ma postać równania różniczkowo-całkowego ze stałymi współczynnikami, które dla stanu ustalonego łatwo rozwiązać przez podstawienie.

Ponieważ rozważamy układy liniowe, wnioskujemy na podstawie rozważań fizycznych, że

kształt funkcji $I(t)$ musi być ten sam, co kształt $E(t)$.

Zakładając więc $E(t) = \widehat{E} \cdot e^{j\omega t}$, przyjmujemy $I(t) = \widehat{I} e^{j\omega t}$ i podstawiając do (7)

$$R \widehat{I} e^{j\omega t} + j\omega L \widehat{I} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \widehat{I} e^{j\omega t} = \widehat{E} \cdot e^{j\omega t}$$

czyli, że $I(t) = \widehat{I} e^{j\omega t}$ spełnia (7), jeśli

$$\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \widehat{I} = \widehat{E}$$

Oznaczając $R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C} = \widehat{Z}$ otrzymujemy zależność

$$\widehat{E} = \widehat{Z} \widehat{I} \tag{8}$$

która ma postać matematyczną prawa Ohma i jest wskutek tego nazywana prawem Ohma dla prądu zmiennego.

Porównując (8) z pierwotną postacią (2) widzimy, że $\widehat{Z}$ jest współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy $\widehat{E}$ i $\widehat{I}$, które są tu liczbami zespolonymi. Równanie (8) jest słuszne jedynie dla harmonicznych funkcji czasu i stanu ustalonego.

Podobnie jak R charakteryzuje całkowicie obwód prądu stałego, Z zawiera wszystkie informacje potrzebne do wnioskowania o zachowaniu się obwodu w stanie ustalonym prądu zmiennego.

Związek (8) jest podstawą symbolicznego rozważania obwodów prądu zmiennego w stanie ustalonym, którą zaproponował Steinmetz (około 1900 r.).

Metoda Steinmetza niesłusznie została nazwana symboliczną, gdyż cały jej symbolizm polega jedynie na zastosowaniu algebry liczb zespolonych. Mało uzasadnioną wydaje się również nazwa „metody wektorowej", gdyż „wektor" Steinmetza nie odpowiada pojęciu wektora w matematyce. Pojęcie matematyczne wektora posiada już i tak rozległe zastosowanie w eletrotechnice, w teorii pól wektorowych i, jak za chwilę zobaczymy, w teorii obwodów, opartej na rachunku tensorów.

Rozważony powyżej przypadek prądu zmiennego jest znowu bardzo specjalny, dotyczy bowiem prądu harmonicznego oraz stanu ustalonego.

W praktyce, szczególnie telekomunikacyjnej, spotykamy często prądy i napięcia odkształcone, nieciągłości oraz pojedyncze impulsy.

Rozważmy za pomocą jakich funkcji matematycznych można wyrazić spotykane w praktyce napięcia i prądy.

Zwykły prąd zmienny wyraża funkcja harmoniczna:

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$a \text{ oraz } b \text{ stałe; } \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad -\infty < t < +\infty$$

$$f(t) = |F| \cos (\omega t + \Psi)$$

$$|F| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

$$\tan \Psi = -\frac{b}{a}$$

$$f(t) = {}^1/_2 \, |F| \left\{ e^{j\Psi} \cdot e^{j\omega t} + e^{j\Psi} \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$f(t) = {}^1/_2 \left\{ \widehat{F} e^{j\omega t} + \widehat{F}^x e^{-j\omega t} \right\} \tag{9}$$

gdzie $\widehat{F}^x$ liczba zespolona sprzężona z liczbą $\widehat{F}$.

W teorii prądów zmiennych zamiast wartości chwilowych rozważamy zespolone amplitudy $\widehat{E}$, $\widehat{I}$, lub wartości skuteczne $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \widehat{I}$ itd., to znaczy, w miejsce $f(t)$ podstawiamy w rozważaniach $\widehat{F}$ (zespolone).

Matematycznie zamiana taka jest przekształceniem funkcyjnym, które można zanotować jak następuje:

$$T\{f(t)\} = F; \quad T^{-1}\{F\} = f(t); \tag{10}$$

gdzie symbole T oraz T^{-1} oznaczają dane prze kształcenia funkcyjne w obu kierunkach.

Prąd zmienny odkształcony wyraża funkcja okresowa dowolnego kształtu.

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{11}$$

gdzie

$$a_0 = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, dt;$$

$$a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

Wprowadzając funkcje wykładnicze:

$$a_n \cos n\omega t + b_0 \sin n\omega t = \frac{1}{2} a_n \left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t} \right) +$$

$$+ \frac{b_n}{2j} \left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(a_n - j b_n \right) e^{jn\omega t} + \right.$$

$$\left. + \left(a_n + j b_n \right) e^{jn\omega t} \right\}$$

oraz zauważymy, że

$$a_n - jb_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\{\cos n\omega t - j \sin n\omega t\} dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega t} dt\; F(n_\omega)$$

Również

$$a_n + j\, b_n = F(n\,\omega)$$

skąd

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ F(n_\omega)\, e^{jn\omega t} + \bar{F} e^{-jn\omega t} \right\}$$

Zauważymy również, że

$$a_0 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(o)\, dt$$

możemy więc przedstawić szereg Fouriera (11) w postaci wykładniczej, nadając n wartości ujemne, zero i dodatnie, jak następuje:

$$\left\{\begin{aligned} & f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} F(\omega_n)\, e^{j\omega_n t}; \quad n_\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_n \\ & F(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j\omega_n t} \qquad n \text{ całkowite} \; -\infty < n < +\infty \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Powyższe związki (12) są wzajemne i mogą być również traktowane jako przekształcenia funkcyjne, które można zanotować symbolicznie, jak następuje:

$$\left| \begin{aligned} & F_s\{f(t)\} = F(\omega_n) \\ & F_s^{-1}\{F(\omega_n)\} = f(t) \end{aligned} \right. \tag{13}$$

We wzorach powyższych $F(\omega_n)$ jest zespolone

$$F(\omega_n) = |F(\omega_n)|\, e^{j\Psi(\omega_n)}$$

gdzie, $|F(\omega_n)|$ wyraża widmo amplitud, czyli charakterystykę amplitud w zależności od częstotliwości;

$\Psi(\omega_n)$ wyraża charakterystykę fazy w zależności od częstotliwości. Charakterystyki powyższe są nieciągłe, gdyż n w tych wzorach jest liczbą całkowitą.

Funkcje czasu wyrażone za pomocą szeregu Fouriera nie posiadają początku i końca. Nadają się one dobrze do zjawisk okresowych, ponieważ każdy okres następny jest identyczny z poprzednim, w skutek czego rozważania dotyczą przebiegu zjawiska ustalonego.

Wszystkie inne rodzaje prądów i napięć, jak impulsy pojedyncze i nieciągłości wyrażają funkcje nieokresowe.

Rozważenie funkcji nieokresowej można sprowadzić do przypadku poprzedniego funkcji okresowej, wydłużając okres $\to\infty$ jak następuje:

Najpierw ustalamy okres $T = 2\pi\lambda$, i wyrażamy szereg Fouriera dla *stałego* punktu $t_1 = x$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{nx}{\lambda} + b_n \sin\frac{nx}{\lambda}\right) \tag{14}$$

gdzie

$$a_m = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\frac{mt}{\lambda} dt;$$

$$b_m = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin\frac{mt}{\lambda} dt;$$

podstawiając a_m i b_m do (14):

$$a_n \cos\frac{nx}{\lambda} + b_n \sin\frac{nx}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\left\{\cos\frac{nx}{\lambda}\cos\frac{nt}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \sin\frac{nx}{\lambda}\sin\frac{nt}{\lambda}\right\} dt = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\frac{n(x-t)}{\lambda} dt$$

Szereg Fouriera dla skończonej wartości λ:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos\frac{n(x-t)}{\lambda} dt;$$

Suma występująca po prawej stronie jest zwykłą sumą Riemanna, która dla $\lambda \to \infty$ przechodzi w całkę.

Jako nową zmienną wprowadzamy $\frac{n}{\lambda} = \omega$, otrzymując w granicy wyrażenie:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (x - t)\, dt \tag{15}$$

zwane całką Fouriera.

W zależności od tego czy funkcja $f(t)$ jest parzysta, nieparzysta lub też ani jedno ani drugie, otrzymujemy przypadki szczególne przekształcenia Fouriera.

Wprzypadku ogólnym mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt \tag{16}$$

skąd

$$\left| \begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x} d\omega \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Przekształcenie funkcyjne Fouriera oznaczymy, jak następuje:

$$F \{ f(t) \} = F(\omega)$$

$$F^{-1} \{ F(\omega) \} = f(t) \tag{18}$$

$F(\omega)$ jest zespolone; moduł $|F(\omega)|$ przedstawia ciągłe widmo amplitud, faza zaś — ciągłe widmo fazy. Całka Fouriera (16) jest najogólniejszym wyrażeniem matematycznym w postaci zamkniętej dowolnych przebiegów w czasie.

Z punktu widzenia matematycznego metoda symboliczna Steinmetza, jak widzieliśmy, może być traktowana jako przekształcenie funkcyjne, to znaczy w miejsce funkcji harmonicznych czasu podstawiamy liczby zespolone; przez co rozważane zagadnienie zostaje przesunięte z płaszczyzny liczb rzeczywistych do płaszczyzny liczb zespolonych. W wyniku takiego przeniesienia otrzymujemy uproszczenie rachunków.

Za pomocą przekształceń Fouriera (18) można również uzyskać podobne przesunięcie rozważań, z tym jednak, że obecnie funkcje czasu mogą być bardzo ogólne, ciągłe lub nieciągłe.

Przekształcenie funkcyjne Laplace'a jest bardzo podobne do Fourier'a, jednak dogodniejsze w użyciu, dlatego też nowoczesny rachunek operatorowy i nowe uogólnienia prawa Ohma oparte są na przekształceniach funkcyjnych Laplace'a.

Nazwa rachunku operatorowego pochodzi stąd, że przekształcenia funkcyjne są operacjami matematycznymi, oznaczanymi za pomocą symboli, zwanych operatorami. Operator jest symbolem, który wyraża w formie zwięzłej przepis czynności matematycznej, jaką należy nad daną funkcją wykonać.

Przekształcenie Laplace'a wyraża całka następująca:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt = f(s) \qquad s > s_0 \tag{19}$$

zespolone

co można wyrazić za pomocą wzoru operatorowego:

$$L \{ F(t) \} = f(s) \tag{20}$$

Potrzebne nam będą wyrażenia L przekształconych dla pochodnej i dla całki:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} F'(t)\, dt = e^{-st} F(t) \Big|_{0}^{\infty} + s \int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

Jeśli $\lim\limits_{t \to \infty} \left[e^{-st} F(t) \right] = 0$, wówczas

$$L \left\{ \frac{dF}{dt} \right\} = s\, L \{ F \} - F(o) \tag{21}$$

Analogicznie

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} \left\{ \int_{0}^{t} F(\tau)\, d\tau \right\} dt = \frac{1}{s} \int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

jeżeli

$$\lim_{t \to \infty} \left[e^{-st} \int_{0}^{t} F(\tau)\, d\tau \right] = o$$

czyli

$$L \left\{ \int_{0}^{t} F(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{s} f(s) \tag{22}$$

Również zauważmy, że L przekształcenie stałej a

$$L \{ a \} = \frac{1}{s} a \tag{23}$$

Powróćmy do podstawowego równania różniczkowego dla pojedyńczego obwodu szeregowego R, L, C.

$$R\, I(t) + L \frac{d\, I(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} I(t)\, dt = E_1(t) + \sigma \tag{24}$$

w równaniu tym uwzględniony jest już jeden warunek początkowy w chwili $t = o$, mianowicie różnica potencjałów na kondensatorze C, oznaczona tu przez σ

Stosując przekształcenie L do równania różniczkowego (24), inaczej mówiąc, mnożąc obie strony przez e^{-st} i całkując otrzymamy:

$$R\int_0^\infty e^{-st} I\,dt + L\int_0^\infty e^{-st}\frac{dI}{dt}\,dt +$$

$$+\frac{1}{C}\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t I\,dt\right\}dt = \int_0^\infty e^{-st} E_1\,dt +$$

$$+\int_0^\infty e^{-st}\sigma\,dt \qquad (25)$$

$$R\,I(s) + L\{s\,I(s) - I(o)\} + \frac{1}{sC}\,I(s) = E_1(s) + \frac{\sigma}{s}$$

gdzie $I(o)$ oznacza prąd w chwili $t = o$, co uwzględnia drugi możliwy do spełnienia warunek początkowy.

Równanie różniczkowe (24) zostało za pomocą L przekształcenia zastąpione przez równanie algebraiczne (25) pomiędzy L — przekształconymi funkcjami, równaniem tym możemy więc manipulować tak, jak zwykłym rówaniem algebraicznym

$$\left(R + Ls + \frac{1}{sC}\right) I(s) = E(s) \qquad (26)$$

gdzie

$$E(s) = E_1(s) + L\,.\,I(o) + \frac{\sigma}{s}$$

nazwiemy funkcją wzbudzenia; zawiera ona L przekształconą SEM E_1 oraz oba możliwe warunki początkowe.

Równanie (26) stanowi kompletne sformułowanie matematyczne równowagi dynamicznej dla pojedyńczego obwodu.

Oznaczając

$$R + Ls + \frac{1}{sC} = Z(s) \qquad (27)$$

otrzymujemy uogólnione prawo Ohma

$$E(s) = Z(s)\,.\,I(s) \qquad (28)$$

Funkcja $Z(s)$ charakteryzuje całkowicie dany obwód szeregowy R, L, C, przy wszelkich możliwych rodzajach wzbudzenia; jest to funkcja zmiennej zespolonej s.

Przekształcenie odwrotne L^{-1} funkcji $I(s)$ w równaniu (28) daje wartość chwilową $I(t)$.

$$L^{-1}\{I(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{E(s)}{Z(s)}\right\} = I(t) \qquad (29)$$

co stanowi kompletne rozwiązanie zagadnienia dla danej funkcji czasu $E(t)$ i danych warunków początkowych.

Przekształcenie odwrotne L^{-1} wyraża całka

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s)\,ds \qquad (30)$$

która jest odwróceniem całki L zdefiniowanej równaniem (19):

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

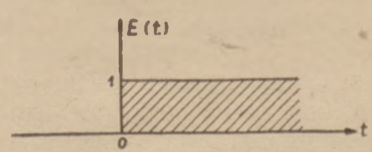
Wzory (19) i (30) znane są w matematyce pod nazwą przekształceń funkcyjnych Laplace'a.

Obliczenie całki (30) polega na wyznaczeniu residuum w każdym biegunie funkcji $f(s)$ i zsumowaniu wyników.

Praktyczne stosowanie rachunku operatorowego nie wymaga obliczania całek (30) i (19) w wielu przypadkach, gdyż istnieją tablice przekształceń Laplace'a, zawierające gotowe wyniki dla dużej ilości funkcji $F(t)$ i $f(s)$, odpowiadających sobie wzajemnie.

Ze wzoru (30) łatwo otrzymać słynny wzór Heaviside'a, t.zw. „rozwinięcie Heaviside'a" (expansion theorem).

Wzór Heaviside'a dotyczy przypadku, gdy $E(t)$ jest nieciągłością SEM jako funkcji czasu, przy czym wartość funkcji w chwili $t = o$ przybiera odrazu wartość 1. Dla $t < o$, $E(t) = o$.



Rys. 2. E (t) jest nieciągłością SEM jako funkcji czasu.

Jeżeli $Z(s)$ jest wielomianem, posiadającym pierwiastki rzeczywiste różne i różne od zera, wówczas funkcję podcałkową w (29) $E(s)\,.\,Z^{-1}(s)$ łatwo rozłożyć na ułamki proste. Heaviside przyjął, że

$$\frac{d}{dt} = p\,; \qquad \int(\quad)\,dt = \frac{1}{p}$$

czyli

$$R\,I + L\frac{d}{dt}\,I + \frac{1}{C}\int I\,dt = \left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)I$$

co jak wynika ze wzoru (26) istotnie ma miejsce, gdy warunki początkowe są zerowe; ponadto $(s \equiv p)$.

Zauważmy także (23), że jeśli $E(t) = 1,\ t > o$

$$L\{E(t)\} = \frac{1}{s}$$

Zatym na podstawie uogólnionego prawa Ohma (28) dla E(t) = 1 mamy:

$$I(s) = \frac{1}{sZ(s)}$$

Rozkładając na ułamki proste

$$\frac{1}{sZ(s)} = \frac{A}{s} + \frac{\Psi}{Z(s)};\quad \frac{1}{Z(s)} = A + \frac{s\Psi}{Z(s)} \therefore A = \frac{1}{Z(o)}$$

W dalszym ciągu, wydzielając czynnik $(s - \alpha_1)$ z wielomianu $Z(s) = (s - \alpha_1)\,\varphi(s)$

$$\frac{1}{s(s-\alpha_1)\,\varphi(s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-\alpha_1} + \frac{C}{\varphi(s)} \therefore$$

$$B = \frac{1}{\alpha_1\,\varphi(\alpha_1)} = \frac{1}{\alpha_1 \frac{d}{ds}\Big[\,Z(s)\,\Big]_{s=\alpha_1}}$$

powtarzając tę czynność dla każdego α_i otrzymamy szukany rozkład na ułamki proste.

$$\frac{1}{s\,.\,Z(s)} = \frac{1}{Z(u)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\alpha_i \frac{d}{ds}\Big[\,Z(s)\Big]_{s=\alpha_i}}; \qquad (31)$$

Stosując do (31) przekształcenie (30), t.j. wyznaczając residuum funkcji podcałkowej dla każdego α_i mamy:

$$I(t) = \frac{1}{Z(o)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\alpha_i t}}{\alpha_i \frac{d}{ds}\Big[\,Z(s)\,\Big]_{s=\alpha_i}} \qquad (32)$$

Jest to wzór Heaviside'a dla przypadku załączania obwodu do źródła *SEM* $E(t) = 1.,\ t > 0$

Przykład:

Obwód szeregowy *R. L;* $E(t) = 1,\ t > 0$

$$Z(s) = R + Ls$$

$$\frac{d}{ds} Z(s) = L;\qquad \alpha_1 = -\frac{R}{L};$$

$$\alpha_1 \frac{d}{ds} Z(s) = -\frac{R}{L}\,.\,L = -R$$

$$Z(o) = R;$$

$$I(t) = \frac{1}{R} - \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{R} = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right);$$

dobrze znany wynik.

Heaviside ustalił wzór (32) doświadczalnie; znając z góry wynik, jaki ma otrzymać, znalazł on drogą prób szereg reguł, dotyczących operowania symbolami $P = \frac{d}{dt}$ oraz $\frac{1}{P} = \int(\quad)\,dt$

Zbiór tych reguł nazwano rachunkiem Heaviside'a. Nie ustalił on jednak granic stosowalności tych reguł, wskutek czego rachunek Heaviside'a nie stanowi żadnej powszechnie uznanej metody matematycznej.

Żadna reguła Heaviside'a nie uwzględnia warunków początkowych (stałych całkowania). Ponadto rachunek Heaviside'a stosuje się jedynie do ograniczonej klasy funkcji (meromorficznych) wielopostaciowych (iloraz dwu wielomianów).

Obecnie rachunek Heaviside'a należy raczej do historii i został zastąpiony całkowicie przez ścisły rachunek operatorowy, oparty na przekształceniach Laplace'a.

Prawo Ohma uogólnione zapomocą *L* przekształceń łączy w sobie obie fazy analizy obwodów, mianowicie analizę stanu ustalonego i nieustalonego, ponadto stanowi ono punkt wyjściowy dla nowej gałęzi teorii obwodów, mianowicie syntezy obwodów elektrycznych.

Rozważmy sieć, zawierającą *n* geometrycznie niezależnych oczek. Oznaczając przez $i_1, i_2 \ldots i_n$ funkcje czasu, wyrażające prądy cykliczne Maxwell'a oraz oznaczając *SEM* w poszczególnych oczkach przez $e_1, e_2 \ldots, e_n$ i zakładając, że *L* przekształcone funkcje

$$I_k(s) = L\{I_k(t)\}\qquad k, j = 1, 2, \ldots n$$
$$E_j(s) = L\{E_j(t)\}$$

istnieją w sensie matematycznym,

Możemy przekształcić układ równań różniczkowych Kirchoffa za pomocą *L* przekształceń jak w przypadku obwodu pojedyńczego.

Uwzględniając jednocześnie warunki początkowe, otrzymamy układ równań *L* przekształconych w postaci (33)

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{jk}(s)\,I_k(s) = E_j(s) + \lambda_j + \frac{\sigma_j}{s};\qquad j = 1, 2 \ldots n$$

gdzie λ_j oznacza całkowite skojarzenie magnetyczne obwodu *j* dla $t = 0$, σ_j zaś oznacza sumę napięć na kondensatorach obwodu *j* dla $t = 0$, oraz

$$Z_{jj} = R_{jj} + L_{jj}\,s + \frac{1}{C_{jj}\,s} \qquad (34)$$

$$Z_{jk} = R_{jk} + L_{jk}\,s + \frac{1}{C_{jk}\,s};\quad j \neq k \qquad (35)$$

Oznaczając prawą stronę (33) przez $E_j(s)$ jak poprzednio, otrzymamy wreszcie układ równań

$$\sum_{k=1}^{n} Z_{jk}(s) I_k(s) = E_j(s); \quad j = 1,2 \ldots n \quad (36)$$

których kształt matematyczny jest identyczny z równaniami dla tejże s i e w przypadku prądu zmiennego.

W powyższym wzorze (36) użyte symbole mają znaczenie następujące:

Z_{jj} *i* Z_{jk} wyrażają oporności pozorne własne i wzajemne (34) i (35) w sensie uogólnionym, t.j. są one funkcjami zmiennej zespolonej s.

$E_j(s)$ jest funkcją wzbudzenia obwodu j.

Znaki algebraiczne dla początkowych sprzężeń i napięć kondensatorów są te same, co w przypadku zwykłych równań ułożonych na zasadzie praw Kirchhoffa.

Przykład:

Równania L przekształcone:

$$Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = E_1 \quad (37)$$
$$Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = E_2$$

gdzie:

$$Z_{11}(s) = R_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)\frac{1}{s}$$

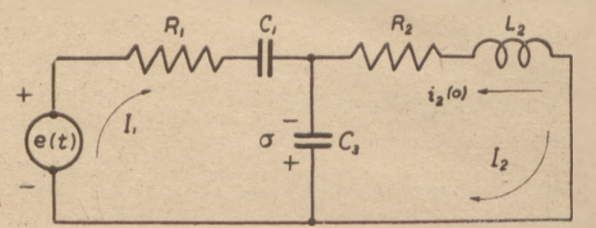
$$Z_{12}(s) = -\frac{1}{C_3 s} = Z_{21}(s)$$

$$Z_{22}(s) = R_2 + L_2 s + \frac{1}{C_2 s}$$

$$E_1(s) = E(s) + \frac{\sigma}{s}$$

$$E_2(s) = -i_2(o) L_2 - \frac{\sigma}{s}$$

Układ równań (37) łatwo rozwiązać algebraicznie względem I_1 oraz I_2, po czym stosując przekształcenie L^{-1} otrzymamy $I_1(t)$ oraz $I_2(t)$.



Rys. 3. Obwód elektryczny do przykładu na str. 52.

W przypadku większej ilości równań korzystniej jest stosować algebrę macierzy.

W języku algebry macierzy układ równań Kirchhoffa przybiera z powrotem postać prawa Ohma.

$$Z \cdot I = E \quad (38)$$

gdzie Z jest macierzą kwadratową współczynników $Z_{jk}(s)$ w sensie poprzednio określonym $I_k(s)$ oraz $E_k(s)$ są L przekształconymi wektorami prądów i SEM.

Równanie (38) w postaci rozwiniętej:

$$\begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \ldots & Z_{nn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{Vmatrix} \quad (39)$$

Pierwszy czynnik po lewej stronie nazywamy macierzą charakterystyczną oporności pozornych układu. Zauważymy jeszcze, że współczynniki $Z_{jk}(s)$ nie są tu funkcjami pulsacji ω, lecz funkcjami zmiennej zespolonej s; macierz ta zawiera wszystkie dane, dotyczące danego układu elektrycznego, niezależnie od rodzaju jego wzbudzenia.

Symbole E oraz I w (38) zdefiniowane są jak następuje:

E jest L przekształconym wektorem wzbudzeń poszczególnych oczek sieci; I jest L przekształconym wektorem prądów sieci.

Termin wektor oznacza tu *geometryczny objekt* przestrzeni n — wymiarowej, którego składowymi są poszczególne E_i, I_i.

Ponieważ każdy wektor może być matematycznie wyrażony za pomocą składowych w dowolnych kierunkach przy warunku, że nowe współrzędne są geometrycznie niezależne, równanie (38) może być przekształcone tak, aby otrzymać prostszą macierz charakterystyczną Z. Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równoważności przekształceń sieci, której własności wyrażone są za pomocą macierzy, jest warunek, aby wartość chwilowa mocy nie uległa zmianie. Przekształcenia takie nazywamy przekształceniami kanonicznymi sieci, gałąź zaś matematyki, traktującą o tych przekształceniach — rachunkiem tensorów. Praktyczna doniosłość rachunku tensorów w elektrotechnice polega na tym, że za pomocą przekształceń powyższych można przekształcić sieć daną na prostszą lub też, mając żądane własności elektryczne sieci, znaleźć samą sieć w postaci najprostszej, która posiada żądane własności elektryczne.

Zestawiając poszczególne postacie prawa Ohma

(i)	$E = R.I$	(1827 r.)
(ii)	$\hat{E} = \hat{Z}.\hat{I}$	(1900 r.)
(iii)	$E(s) = Z(s) \cdot I(s)$	(1942 r.)
(iv)	$E = Z I$	(1944 r.)

widzimy, że postać (iv) w interpretacji rachunku tensorów i rachunku operatorowego stanowi postać najogólniejszą, która łączy w sobie obie fazy

analizy, stanu ustalonego i stanu przejściowego oraz wszystkie rodzaje zagadnień teorii obwodów, mianowicie:

Postać:

$$I = \frac{E}{Z} \qquad \text{(a)}$$

reprezentuje zagadnenie rozpływu prądów.

$$Y = \frac{I}{E}, \quad \left(Y = \frac{1}{Z} \right) \qquad \text{(b)}$$

reprezentuje zagadnienie syntezy obwodów, t.j. znalezienie samego obwodu, jeśli rozpływ prądów i wzbudzenie są dane, wreszcie

$$I = Y \cdot E \qquad \text{(c)}$$

reprezentuje zagadnienie korekcji zniekształceń aparatów rejestrujących.

Zagadnienie rozpływu prądów jest dobrze znane i nie wymaga komentarzy.

Zagadnienie syntezy obwodów jest na ogół mniej znane; zostało ono znacznie pogłębione i rozpracowane w czasie ostatniej wojny. Jako zagadnienie typowe wymienić tu należy zagadnienia filtrów w stanie ustalonym i nieustalonym, wszelkie układy korekcyjne, wreszcie układy elektryczne różniczkujące i całkujące, spotykane w specjalnych urządzeniach.

Jako narzędzie matematyczne przy rozważaniu zagadnień typu (b) wysuwa się na pierwsze miejsce rachunek tensorów. Rozważenie choćby pobieżne zasad tego rachunku i otrzymanych wyników praktycznych wykracza poza ramy tego artykułu.

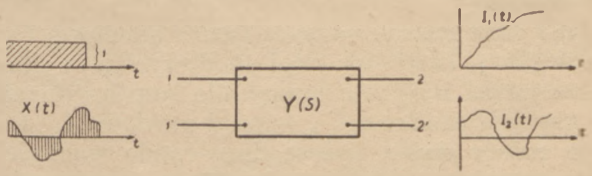
Typowym zagadnieniem typu *(c)* jest korekcja pomiarów za pomocą obliczenia w przypadku przebiegów nieustalonych. Zagadnienie to można ująć pokrótce jak następuje: dany jest układ sprzęgający, którego przewodność wzajemna pomiędzy zaciskami 1-1' i 2-2' w znaczeniu uogólnionym jest $Y(s)$.

Przypuśćmy, że na zaciskach 2-2' zarejestrowano pewien przebieg w czasie $I_1(t)$ jako skutek impulsu prostokątnego $E(t) = 1$, przyłożonego do zacisków 1-1'. Przypuśćmy następnie, że możemy obliczyć z wykresu (oscylogramu) $I_1(t)$ funkcje $I_1(s)$, t.j. funkcje przekształcenia Laplace'a.

Ponieważ $L \left\{ I \right\} = \frac{1}{s}$ na zasadzie uogólnionego prawa Ohma możemy napisać:

$$I_1(s) = Y(s)\, E(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s} \qquad (40)$$

Jeżeli ten sam układ użyjemy ponownie do zarejestrowania nieznanego przebiegu X(t), otrzymamy w wyniku oscylogram $I_2(t)$, z którego możemy obliczyć $I_2(s)$; mamy zatem



Rys. 4. Układ sprzęgający do str.

$$I_2(s) = Y(s)\, X(s) \qquad (41)$$

Dzieląc stronami otrzymamy ostatecznie

$$X(s) = \frac{I_2(s)}{s\, I_1(s)} \qquad (42)$$

skąd możemy obliczyć

$$X(t) = L^{-1} \left\{ X(s) \right\}$$

Mianownik w wyrażeniu 42 stanowi poprawkę zniekształcenia, wprowadzonego przez układ pomiarowy. Jeśli zniekształcenia nie ma, $S \cdot I_1(s) = 1$, gdyż wtedy przy kalibrowaniu impulsem prostokątnym otrzymalibyśmy $I_1(s) = \frac{1}{s}$ t.j. mielibyśmy zarejestrowany kształt ten sam, co nadany. Zauważmy również, że wzór 42 nie zawiera $Y(s)$.

Kalibrowanie impulsem prostokątnym ma wiele zalet praktycznych, bowiem impuls ten łatwo otrzymać przez zwykłe załączenie obwodu, ponadto impuls ten pokrywa bardzo szeroki zakres częstotliwości, teoretycznie nieskończony. Obliczanie L przekształconych funkcji wprost z wykresu zostało opracowane w postaci metody rachunkowo wykreślnej (przez autora tego artykułu) i nie nastręcza żadnych trudności.

Nowa postać uogólniona (38) prawa Ohma jest wynikiem poszukiwań, przedsięwziętych w związku z pewnymi zagadnieniami praktycznymi i stanowi przykład wzajemnego dopełniania się elektrotechniki teoretycznej i praktycznej.

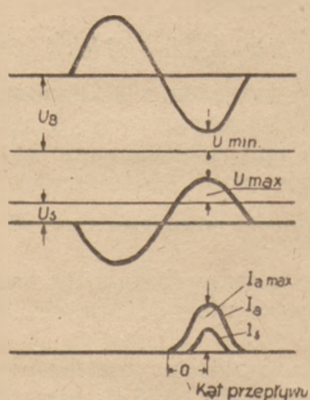
Inż. JÓZEF LENKOWSKI
Politechnika Gdańska

Charakterystyka robocza wzmacniaczy klasy C

Obliczanie wzmacniaczy klasy C graficzne wg Prince'a (Proc. I.R.E. 1923), analityczne wg Terman'a (Proc. I.R.E. 1936), Everitt'a i innych, jest następujące:

Jako dane mamy: napięcie baterii anodowej U_b największy, chwilowy prąd anodowy I_{am} i charakterystyki statyczne lampy dla współrzędnych — napięcie anodowe U_a — prąd anodowy I_a. Do tego należy dodać jeszcze dane co do wielkości kąta przepływu prądu anodowego Θ (miara części okresu, podczas której prąd anodowy przepływa przez lampę) oraz założyć stosunek maksymalnego napięcia na siatce do minimalnego napięcia na anodzie.

Przebieg czasowy napięcia anodowego, siatkowego i prądu anodowego uwidoczniony jest na rys. 1.



Rys. 1. Przebiegi napięć i prądów w lampie wzmacniacza klasy C.

Impulsy prądu anodowego, występujące jakgdyby w prostowniku jednokierunkowym, otrzymujemy przez przerzutowanie zmiennego napięcia siatki na oś prądu anodowego w układzie charakterystyk (U_a, I_a). Posiadając teraz przebieg prądu anody, możemy obliczyć wielkość składowej podstawowej częstotliwości przez analizę szeregiem Fourrier'a, bądź graficznie, bądź też analitycznie.

Obciążeniem w obwodzie anodowym jest strojony obwód *LC*. Wobec tego składowa zmienna napięcia anodowego musi mieć przebieg sinusoidalny, jak to podane jest na rys. 1.

Niezależnie więc od kształtu napięcia wzbudzającego wzmacniacza, napięcie anodowe jest czysto sinusoidalne w przeciwstawieniu do wzmacniaczy małej częstotliwości. W tym wypadku napięcie na oporze obciążenia jest stale proporcjonalne do prądu anodowego, tak że przy wysterowaniu lampy punkt odpowiadający każdorazowym chwilowym wartościom prądu i napięcia anody, porusza się po prostej zwanej charakterystyką roboczą i nachylonej pod kątem

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{R_a}, \text{ (gdzie } R_a \text{ — opór obciążenia)} \quad (1)$$

względem osi odciętych.

Dla wypadku naszego wzmacniacza klasy C, przy obciążeniu oporem R_a amplituda napięcia zmiennego anody winna być:

$$U_a = I_{o1} \cdot R_a \quad (2)$$

gdzie I_{a_1} jest amplitudą podstawową częstotliwości prądu anodowego.

Posługując się już wyżej wymienioną metodą analizy prądu anodowego przy pomocy szeregu Fourier'a, można uzależnić I_{a_1} od wielkości prądu maksymalnego anody I_{am} przez pewien współczynnik $f(\Theta)$, na którego wielkość będzie miał wpływ kąt przepływu Θ i kształt charakterystyk statycznych lampy.

W tym wypadku:

$$I_{o1} = I_{om} \cdot f(\Theta) \quad (3)$$

oraz

$$U_o = I_{om} \cdot f(\Theta) \cdot R_o \quad (4)$$

Zależność (4) przedstawia pewnego rodzaju proporcję między U_a i I_{am}, gdzie współczynnikiem proporcjonalności jest

$$R_o \cdot f(\Theta) \quad (5)$$

Powstaje teraz zagadnienie czy wyrażenie (4) przedstawia charakterystykę roboczą wzmacniacza klasy C.

Z definicji „charakterystyka robocza" wynika, że jest to linia, po której porusza się punkt wiążący ze sobą każdorazowe chwilowe wartości prądu i napięcia anody lampy. Równanie (4) daje zależność amplitudy napięcia od szczytowej wartości prądu anodowego, czyli to jest zależność jednej tylko pary wartości prądu i napięcia. Całkowite rozwiązanie zagadnienia charakterystyki roboczej daje metoda graficzna. Podstawą jest tu z góry narzucony przez obciążenie obwodem strojonym przebieg sinusoidalny napięcia anodowego o amplitudzie zależnej od wartości szczytowej prądu anodowego. Zmienność sinusoidalna napięcia wzbudzającego powoduje sinusoidalną zmianę napięcia anody z fazą przeciwną. Aby to było spełnione, odcinki charakterystyki roboczej przecinającej w swym przebiegu pole charakterystyk lampy (U_a, I_a) dla równych odstępów napięć

siatki, po przerzutowaniu na oś odciętych, — powinny być równe. Stąd — charakterystyka obciążenia będzie prostą dla tej części pola charakterystyk, gdzie odstępy są jednakowe (część prostoliniowa). Nachylenie jej w danym wypadku da się wyrazić:

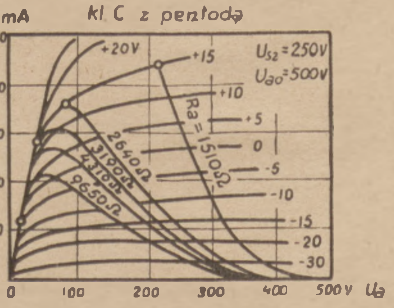
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{R_a \cdot f(\Theta)} \tag{6}$$

gdyż wobec prostoliniowości, wartość maksymalna i chwilowa mają ten sam współczynnik proporcjonalności.

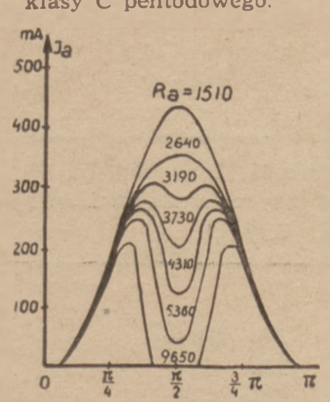
Dla orientacji podaję wartości f (Θ) dla różnych wielkości kąta przepływu Θ:

Θ^0	0	40	60	90	120	150	180
f (Θ) dla $J_a = c.U$	0	0 281	0 391	0.500	0.535	0.521	0.500
f (Θ) dla $J_a = c.U^{3/2}$	0	0 249	0.348	0.459	0.507	0.514	0.504

Dla reszty pola charakterystyk, t.j. tam, gdzie występują nieliniowości, prowadzimy charakterystykę roboczą odcinkami tak, aby rzuty ich stale były sobie równe. Dla przeprowadzenia tej konstrukcji, trzeba znać punkt końcowy wysterowania, t.j. należy założyć $U_{a\ min}$ i $U_{s\ max}$, a następnie od ustalonego krańca cofać się wstecz aż do napięcia baterii U_b.



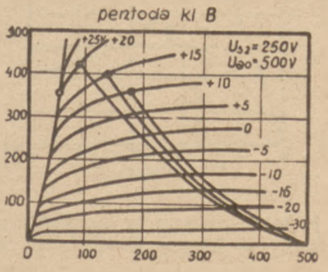
Rys. 2. Charakterystyki robocze wzmacniacza klasy C pentodowego.



Rys. 3. Przebieg prądu anodowego dla różnych oporów obciążenia do rys. 2.

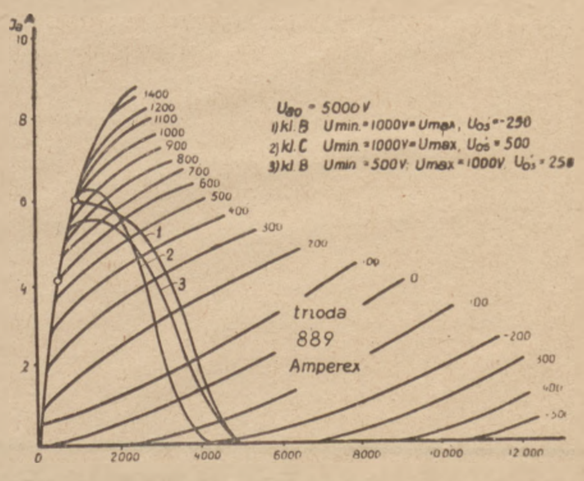
Z wykreślonej charakterystyki obciążenia można teraz z łatwością przerzutować czasowy przebieg prądu anodowego, a z tego znowu przez analizę szeregiem Fourrier'a — obliczyć składową częstotliwości podstawowej prądu anodowego $i_{a\ 1}$. Posiadając napięcie zmienne anody U_a (względnie amplitudę U_a), oraz prąd $i_{a\ 1}$, możemy obliczyć opór obciążenia R_a.

Jako przykład podaję tutaj linie wysterowania pentody dla stałego Θ, sterowanej wciąż do tej samej wartości napięcia siatki $U_{s\ max}$ (rys. 2 i 3). Rys. 4 daje charakterystyki robocze tejże pentody w klasie B.



Rys. 4. Charakterystyki robocze wzmacniacza kl. B z pentodą.

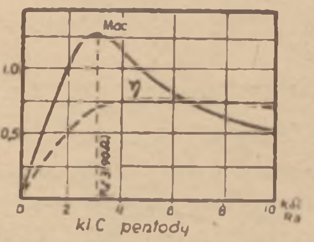
Jako drugi przykład podaję triodę o chłodzeniu wodnym typu 889 Amperex. Napięcie baterii dla wszystkich wypadków 5000 V. Dla wypadków 1 i 2, wysterowanie do $U_{a\ min} = 1000$ V, $U_{s\ max} = 1000$ V; przedpięcie siatki $U_{os} = -250$V dla wypadku 1, a $U_{os} = -500$ V dla wypadku 2. Krzywa 3 dla $U_{a\ min} = 500$ V, $U_{s\ max} = 1000$ V, $U_{os} = -250$ V.



Rys. 5. Charakterystyki robocze wzmacniacza klasy B i C z triodą.

Jak widać krzywe 1 i 3 są klasy B, zaś 2 klasy C pracy wzmacniacza. Kształt krzywych jest zależny od umieszczenia krańcowego punktu wysterowania ($U_{a\ min}$, $U_{s\ max}$) oraz kąta Θ, dla stałego napięcia U_b. Należy obecnie zastanowić się nad użytecznością tak skonstruowanej charakte-

rystyki roboczej. Otóż posiada ona bezsprzecznie te same zalety przejrzystego zestawienia przebiegów czasowych napięć siatki i anody oraz prądu anodowego równocześnie ze sobą powiązanych. Przez zastosowanie uproszczonej metody graficznej analizy szeregiem Fourrier'a pozwoli to rozwiązać wszelkie zagadnienia, związane z obliczaniem wzmacniaczy klasy C lub B wielkiej częstotliwości, z równoczesną możnością ustalenia optymalnych warunków ze względu na sprawność. Max. możliwą do uzyskania moc otrzymuje się



Rys. 6. Moc oddana w sprawność pentody w klasie C (do rys. 2).

mianowicie przy umieszczeniu krańcowego punktu wysterowania dokładnie w zagięciu charakterystyki statycznej, t.j. w punkcie, gdzie przejmowanie prądu przez anodę przechodzi z zakresu Below'a do Tank'a.

W/g Terman'a należy przy określaniu krańcowego punktu wysterowania wyjść z maksymalnego prądu anodowego, ograniczonego jedynie możliwościami emisyjnymi katody. Przy jednoczesnym założeniu kąta Θ i stopnia wykorzystania napięcia anodowego (stosunek amplitudy napięcia anodowego do napięcia baterii — $\frac{U_a}{U_b}$) punkt krańcowy zostaje ustalony. Pozostaje niejasne jedynie zagadnienie sprawności, która osiąga maximum dla szczytu wysterowania, umieszczonego w „łokciu" odpowiedniej, ostatniej charakterystyki I_a (U_a).

Reasumując: charakterystyka robocza da się skonstruować dla wzmacniaczy klasy C i B, z tym jednak, że nachylenie jej stoi tylko w luźnym związku z R_a, a to ze względu na charakter rezonansowy obciążenia. Niemniej jednak i ten rodzaj charakterystyki roboczej może oddać usługi przy badaniu tych układów.

Bibliografia:

1. F. E. Terman: Radioengineering, 1937.
2. H. Rothe, W. Kleen, Elekronenröhren als End und Sendeverkstärker, 1940.

Adres Redakcji i Administracji: **Warszawa, Nowogrodzka 45, III p., telef. 871-70.**
Konto: „Przegląd Telekomunikacyjny", PKO w Warszawie Nr. I 4130 oraz **rachunek miejscowy Nr. 9** W-wa 1.
Sekretariat czynny codziennie od godz. 9 do 14.

WARUNKI PRENUMERATY:

Rocznie	ZŁ. 250.—
Kwartalnie	ZŁ. 65.—
Pojedyńczy numer	ZŁ. 65.—

Redaktor: **inż. Henryk Kowalski.** Wydawca: **Sekcja Telekomunikacyjna SEP**

Zakł. Graf. „Książka", W-wa, Smolna 12. Nr B-17044.